De la Fraction au Nombre

A. CHEVALIER et C. DOCQ, *GEM — UCL*

1re partie : les rectangles semblables

Mots clés : fraction, rapport, rectangles semblables, proportionnalité.

Chaque histoire personnelle de l'apprentissage des fractions commence tôt, avec les premières expériences concrètes de partage. Elle se poursuit longtemps, jusqu'à l'acquisition du concept de nombre, en passant par la découverte de diverses facettes de fractions et d'opérations.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) a préparé quelques séquences d'activités qui jalonnent cet apprentissage. Dans cet article, nous vous en proposons une première destinée à des élèves du premier degré et qui traite de rectangles semblables.

La première partie contient la fiche de travail destinée aux élèves et la seconde propose les solutions et les commentaires épistémologiques pointant les différentes facettes du concept de fraction à l'oeuvre.

Activités

1. **Des rectangles**
   1.1. Dessine plusieurs rectangles dont la largeur vaut les $\frac{2}{5}$ de la longueur.
   1.2. Rassemble les dimensions de ces rectangles (et de ceux des autres élèves) dans le tableau ci-dessous :

Longueur ou L							
largeur ou l							

Tab. 1

   1.3. Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ? Explique.

(O) Adresses des auteurs : Anne Chevalier, rue de l'eau vive, 15, 1420 Braine l'Alleud, e-mail : a_chev@encbw.be, Christine Docq, drève du bonheur, 16 , 1150 - Bruxelles, christine.docq@brutele.be

2. **Une famille de rectangles dans un repère**

   Dessine ces différents rectangles dans un système d'axes avec un sommet à l'origine et les deux côtés issus de ce sommet alignés le long des axes.

   Que peux-tu observer à propos des quatrièmes sommets ? Comment peux-tu caractériser leurs coordonnées ?

3. **D'un tableau vers des formules**

   3.1. Reprends les données du tableau 1 dans le tableau 2 et complète-le en donnant pour chaque rectangle, son périmètre et son aire.

1	*Longueur ou L*						
2	*largeur ou l*						
3	*Périmètre ou P*						
4	*Aire ou A*						

Tab. 2

   3.2. Ce tableau traduit-il aussi une situation de proportionnalité ?

   3.3. Dans ce tableau, on passe de la ligne 1 à la ligne 3 en multipliant par $\frac{14}{5}$ et de la ligne 2 à la ligne 3 en multipliant par le nombre 7. D'où viennent ces nombres ?

   3.4. Par contre, l'aire n'est pas proportionnelle à la longueur. Quelle formule lie les nombres de la ligne 1 à ceux de la ligne 4 ?

   3.5. Qu'en est-il entre les nombres des lignes 2 et 4 ?

4. **Visualiser des formules par des dessins**

   4.1. Interprète géométriquement les résultats relatifs aux aires obtenus en 3.4 et 3.5.

   4.2. Combien de fois le carré construit sur la largeur du rectangle est-il contenu dans le carré construit sur la longueur de ce rectangle ? Vérifie le résultat algébriquement.

Solutions et commentaires ([1]).

1. **Des rectangles**

   1.1. On donne un rapport entre deux dimensions. Ce rapport doit être utilisé comme *fraction-opérateur* dans la construction effective d'un

([1]) **Les différentes facettes des fractions et les opérations sur les fractions sont en italique dans tous les commentaires de ce document** rectangle. On engendre ainsi sans le dire une famille de rectangles semblables.

1.2. Voici un exemple de tableau :

Longueur ou L	5	2,5	7,5	1	4	10	6,5
largeur ou l	2	1	3	0,4	1,6	4	2,6

Tab. 3

1.3. On trouve aisément que le tableau 3 est un tableau de proportionnalité : en effet, tous les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant les nombres correspondant de la première par $\frac{2}{5}$. On retrouve la relation $l = \frac{2}{5}L$.
Par ailleurs, on peut aussi observer que quelle que soit la valeur L et son correspondant l, on a ce qui peut également s'écrire sous la forme

$$\frac{L}{l} = \frac{5}{2}$$

$$L = \frac{5}{2}\ l$$

C'est l'occasion de mettre en évidence que $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ sont deux opérateurs inverses. On peut schématiser la situation de la façon suivante :

$$L \underset{\left(\div \frac{2}{5}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\times \frac{5}{2}\right)}{\overset{\times \frac{2}{5}}{\rightleftarrows}} l$$

On conclut ainsi que diviser par $\frac{2}{5}$ revient à multiplier par $\frac{5}{2}$.

2. **Une famille de rectangles dans un repère**

Cette question permet de faire le lien entre similitude, proportionnalité et équation de droite. En effet, si on place tous les rectangles avec le côté correspondant à la longueur le long de l'axe des x, tous les quatrièmes sommets sont alignés sur une demi-droite issue de l'origine qui se superpose avec les diagonales des rectangles.

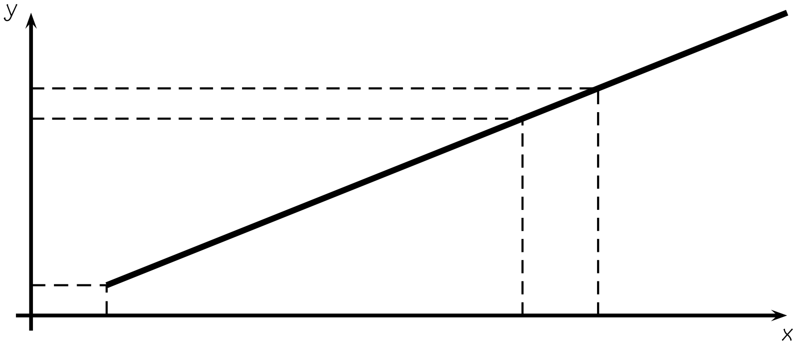

Fig.1

Les coordonnées de chaque point de cette demi-droite correspondent aux dimensions d'un rectangle de cette famille. On passe ainsi

de la formule $l = \frac{2}{5}\ L$ à l'équation $y = \frac{2}{5}\ x$

qui caractérise tous les points de cette demi-droite. On a un lieu géométrique de points caractérisé par une formule algébrique.

Si par contre, on place tous les rectangles avec le côté correspondant à la largeur sur l'axe des x , on est amené à exprimer L en fonction de l et on passe

de la formule $L = \frac{5}{2}\ l$ à l'équation $y = \frac{5}{2}\ x$.

Dans le passage de la formule $l = \frac{2}{5}\ L$ à l'équation $y = \frac{2}{5}$, le coefficient $\frac{2}{5}$ passe du statut *d'opérateur agissant sur des longueurs* à celui *d'opérateur agissant sur des nombres*. Ainsi son statut se rapproche de celui de nombre.

Par ailleurs, les représentations graphiques donnent l'occasion de travailler le concept de *pente*.

3. **D'un tableau vers des formules**

3.1. Voici le tableau 3 complété avec les périmètres et les aires :

1	*Longueur ou L*	5	2.5	7.5	1	4	10
2	*largeur ou l*	2	1	3	0.4	1.6	4
3	*Périmètre ou P*	14	7	21	2.8	11.2	28
4	*Aire ou A*	10	2.5	22.5	0.4	6.4	40

Tab. 4

3.2. Pour comparer les éléments des lignes 1 et 3, on peut, par exemple *calculer les rapports* suivants :

$\mathbf{\frac{5}{14}}$; $\frac{2.5}{7} = \mathbf{\frac{5}{14}}$; $\frac{7.5}{21} = \frac{15}{42} = \mathbf{\frac{5}{14}}$; $\frac{1}{2.8} = \frac{10}{28} = \mathbf{\frac{5}{14}}$; $\frac{4}{11.2} = \frac{40}{112} = \mathbf{\frac{5}{14}}$; $\frac{10}{28} = \mathbf{\frac{5}{14}}$;

Il y a donc proportionnalité entre les lignes 1 et 3.
Il en va de même entre les lignes 2 et 3 car en faisant des calculs du même type, on trouve :

$$\frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{0.4}{2.8} = \frac{4}{28} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

Par contre, on s'aperçoit rapidement qu'il n'y a pas proportionnalité entre les lignes 1 et 4. En effet,

$$\frac{5}{10} \neq \frac{2.5}{2.5}$$

3.3. Pour retrouver le *coefficient* $\frac{14}{5}$, il faut *exprimer* le *périmètre* P en *fonction de* la longueur L :

$$P = 2(L+l) = 2\left(L+\frac{2}{5}\ L\right) = 2\left(1+\frac{2}{5}\right)\ L = 2\left(\frac{5}{5}+\frac{2}{5}\right)\ L = 2\times\frac{7}{5}\ L = \frac{14}{5}\ L$$

$$P = 2\left(L+\frac{2}{5}\ L\right) = 2\left(\frac{5}{5}\ L+\frac{2}{5}\ L\right) = 2\left(\frac{7}{5}\ L\right) = \frac{14}{5}\ L$$

Dans cette démarche, les élèves sont invités à utiliser *des expressions algébriques contenant des coefficients fractionnaires*. De plus ils doivent *réduire au même dénominateur, additionner deux fractions, multiplier une fraction par un nombre*. Dans la première résolution, on travaille sur *des nombres* et dans la deuxième sur *des grandeurs*. Dans les deux cas, il faut *fractionner l'unité*, ce qui est peu usuel.
Pour retrouver le *coefficient* 7, il faut *exprimer* le *périmètre* en *fonction de* la largeur l :

$$P + 2(L+l) = 2\left(\frac{5}{2}\ l+l\right) = 2\left(\frac{5}{2}\ l+\frac{2}{2}\ l\right) = 2\left(\frac{7}{2}\ l\right) = 7l$$

3.4. Pour trouver la formule qui permet d'exprimer l'aire A en *fonction de* la longueur L, on passe par les étapes :

$$A = L\times l = L\times\frac{2}{5}\ L = \frac{2}{5}\ L^2$$

On peut dire que l'aire est proportionnelle au carré de la longueur. On retrouve le facteur $\frac{2}{5}$ qui lie la largeur à la longueur.

3.5. *De la même façon, on obtient la relation*

$$A = L \times \ l = \tfrac{5}{2} \ l \times l = \tfrac{5}{2} \ l^2$$

4. Visualiser des formules par des dessins

4.1. *Géométriquement, ces deux relations peuvent être interpretées par les figures 2 à 5.*

$$A = \tfrac{2}{5} \ L^2$$

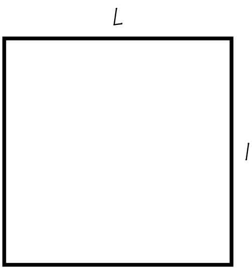

Fig. 2

Le rectangle donné est contenu deux fois et demi dans le carré d'aire L^2.

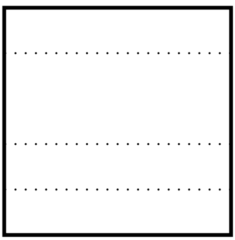

Fig. 3

L'aire du rectangle vaut les $\frac{2}{5}$ de l'aire du carré d'aire L^2

$$A = \tfrac{5}{2} \ l^2$$

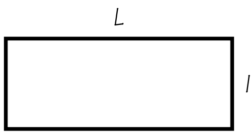

Fig. 4

Le rectangle donné contient deux fois et demi le petit carré d'aire l^2.

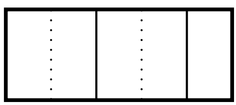

Fig. 5

L'aire du rectangle vaut les $\frac{5}{2}$ de l'aire du carré d'aire l^2

4.2. *Géométriquement, en associant les figures 2 et 4, on obtient la figure 6*

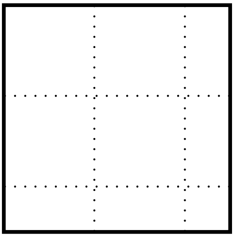

Fig.6

Le carré de côté l est contenu six fois et un quart dans le carré de côté L.
Algébriquement, on peut retrouver ce résultat soit en égalant les deux formules de l'aire :

$$\frac{2}{5}\ L^2 = \frac{5}{2}\ l^2,$$

et donc,

$$L^2 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}\ l^2 = \frac{25}{4}\ l^2 ;$$

soit en partant de la relation initiale

$$L = \frac{5}{2}\ l,$$

ce qui conduit à l'aire du carré de côté L :

$$L^2 = \left(\frac{5}{2}\ l\right)^2 = \frac{25}{4}\ l^2.$$

Or, 25 quarts correspondent à 6 unités et un quart.
Nous avons *multiplié une fraction par elle-même*. Par ailleurs, nous avons *décomposé une fraction en une partie entière et une partie fractionnaire.*

Conclusion

A travers ces activités, les élèves ont eu l'occasion d'utiliser les fractions comme rapports, d'accéder à des écritures littérales dont les coefficients sont fractionnaires et d'effectuer quelques opérations sur les fractions dans un contexte significatif. Un prochain article traitera des fractions dans le contexte des engrenages de vélos.