Des sources familières de la géométrie

N. ROUCHE, *CREM*

Notre idée est de partir à la découverte des sources de la géométrie non dans les traités, mais dans les actions et les objets quotidiens qui provoquent naturellement la pensée géométrique. Il s'agit d'objets qui se trouvent dans l'environnement et d'actions quotidiennes, mais nous examinerons aussi certains matériels et certaines pratiques scolaires auxquels on recourt pour enseigner la géométrie (essentiellement les polygones en carton et le nouveau logiciel appelé Apprenti Géomètre). Bien entendu, nous ne saurions évoquer tout ce qui provoque une première pensée géométrique, et cet exposé n'est pas un inventaire. Nous commencerons par les lignes droites et les surfaces planes, omniprésentes dans l'environnement, surtout dans les directions horizontale et verticale. Puis nous examinerons quelques questions d'orientation qui s'y rattachent, pour en arriver ensuite aux polygones et aux solides familiers. La plus grande partie de l'exposé portera sur des objets et actions simples, qui sollicitent surtout l'intelligence pratique. Nous terminerons toutefois par un coup d'œil sur certains objets déformables, plus difficiles à saisir, et qui conduisent naturellement de la perception et des actions aux définitions et au raisonnement, de l'intelligence pratique à l'intelligence discursive.

Signalons deux frontières de cette étude. Tout d'abord les objets et les actions que nous étudions préparent l'idée de mesure, qu'il s'agisse de longueurs, d'aires ou de volumes. Mais nous n'évoquerons aucune mesure. Le monde d'aujourd'hui est à ce point saturé de mesures que l'on en oublierait presque l'existence de grandeurs non mesurées. Or pour construire l'idée de mesure, on ne saurait la présupposer. Il faut partir d'un univers de grandeurs non encore mesurées. C'est celui que l'on trouvera ci-après.

Ensuite nous nous arrêterons en deçà des constructions aux instruments. Celles-ci mériteraient une étude à part entière. Manier des objets tout faits est en général plus simple, demande d'enchaîner moins d'opérations que de

---

Adresse de l'auteur: Nicoles Rouche, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique ; courriel : `rouche@math.ucl.ac.be`.
Cet article a déjà été publié dans la revue *L' Insegnamento delle Matematica*. Nous remercions cette revue pour l'autorisation qui nous a été aimablement donnée de le reproduire.

les fabriquer. C'est pourquoi les constructions aux instruments, qui s'appuient néanmoins sur l'intelligence pratique, offrent une transition entre celle-ci et l'intelligence discursive. Mais ceci est donc une autre histoire.

Tout au long de notre parcours, nous nous efforcerons de montrer en quoi nos observations diffèrent, en particulier et en général, de la géométrie des manuels et des traités, que pour la facilité nous appellerons *géométrie théorique.* Elles en diffèrent, tout en y conduisant !

Divers auteurs se sont efforcés, au cours des siècles, de rattacher la géométrie à ses sources familières. Citons parmi les plus marquants Clairaut [1741], Mach [1922] et Freudenthal [1983].

1. Les lignes droites et les surfaces planes

Nous prenons ici les locutions *ligne droite* et *surface plane* au sens de la langue commune. Il ne s'agit donc pas de ces droites et plan infinis et infiniment fins dont parlent la plupart des manuels de géométrie. Toutefois, et pour la facilité du langage, nous dirons ci-après simplement *droite* et *plan.*

1.1. Les droites verticales

Un corps pesant, abandonné sans vitesse initiale, tombe verticalement. Le fil à plomb matérialise une droite verticale. On plante les poteaux, on construit les pylônes et les tours verticalement, pour assurer leur stabilité. Les droites verticales abondent dans l'environnement. Elles possèdent deux propriétés remarquables, que les roseaux de la figure 1 suffisent à illustrer : d'une part, *elles sont toutes parallèles*, et de l'autre, *elles sont naturellement orientées.* Sur un droite verticale, il y a un sens de bas en haut, et le sens opposé de haut en bas. Chaque roseau a son pied dans l'eau, en bas, et sa tête en haut.

Deux remarques s'imposent dès maintenant. Tout d'abord, la direction verticale n'a rien à voir avec la géométrie théorique : elle est déterminée par la pesanteur, qui est une cause physique. Si nous vivions dans l'espace interplanétaire, nous n'observerions aucune direction privilégiée. Ensuite, nous découvrons d'emblée que les droites verticales sont orientées, alors que l'on peut très bien construire une géométrie théorique dans laquelle les droites sont introduites longtemps avant qu'on parle de leur orientation possible.

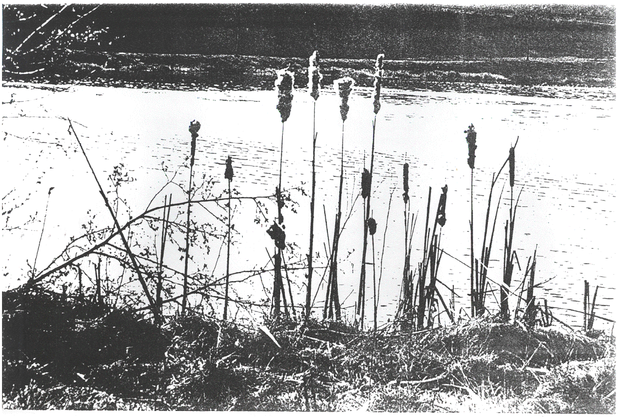

Fig. 1

1.2. Les plans et les droites horizontaux

Les plaines que l'on voit en Hollande, la surface d'un étang, le plancher d'une pièce d'habitation sont autant d'exemples de plans horizontaux. Une surface (si elle est solide : nous excluons ici la surface d'un étang !) est un plan horizontal si une bille posée en un quelconque de ses points demeure là où on l'a posée, si elle ne roule pas. Les plan horizontaux ont une propriété remarquable : *ils sont tous parallèles.* La figure 2 en montre quelques-uns. Notons que, comme les droites verticales, les plans horizontaux ne doivent leur existence qu'à la pesanteur, qui est une donnée physique.

Venons-en maintenant aux droites horizontales, comme par exemple un bâton flottant à la surface d'un étang, les bords d'une table rectangulaire posée sur un sol horizontal, le chemin suivi par une personne qui se dirige en plaine vers un point de son horizon. Contrairement aux droites verticales, les droites horizontales peuvent

> soit se couper, comme deux routes droites qui se croisent en plaine ; dans ce cas elles se trouvent toutes deux dans un plan horizontal ;

soit être parallèles, comme les bords opposés d'une table rectangulaire ; dans ce cas, elles se trouvent encore dans un même plan, mais celui-ci n'est pas nécessairement horizontal ; il suffit de penser à une planche rectangulaire dont une arête seulement repose sur le sol ;

soit se croiser sans se toucher, comme les deux lignes de chemin de fer de la figure 3 ; dans ce cas, il est impossible de les imaginer dans un même plan.

Fig. 2

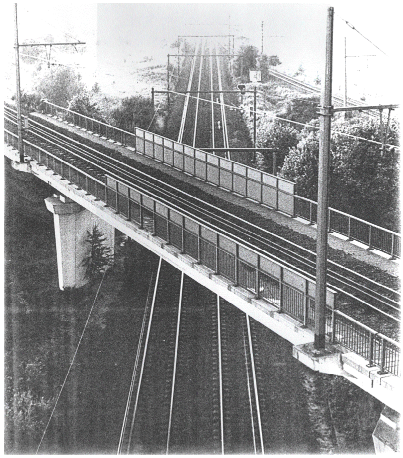

Fig. 3

Contrairement aux droites verticales également, les droites horizontales ne sont pas d'office orientées. Par exemple, une ficelle tendue à l'horizontale n'a pas de direction privilégiée. Par contre, si un être humain avance droit devant lui, il y a un avant et un arrière sur son chemin. L'orientation est ici *d'origine biologique* : la personne transfère à la droite son orientation propre. D'autres droites sont orientées *par convention* : tel est le cas lorsqu'une rue rectiligne est déclarée à sens unique.

1.3. Bien d'autres droites et plans

Les parements des murs sont le plus souvent des plans verticaux, de même que les tableaux noirs, les portes et les écrans de cinéma. Nous avons vu que tous les plans horizontaux sont parallèles. Par contre deux plans verticaux peuvent être parallèles ou se couper, et s'ils se coupent, ils le font suivant une droite verticale. L'image d'un album dressé sur une table et dont les feuillets sont écartés en éventail (figure 4) montre que, lorsqu'une droite verticale rencontre un plan horizontal, par le point de rencontre passent une infinité de droites contenues dans le plan. Lorsqu'une droite verticale rencontre un plan horizontal, on dit qu'elle est *perpendiculaire au plan*. Lorsqu'une droite verticale rencontre une droite horizontale, on dit qu'elles sont *perpendiculaires*. Elles forment des *angles droits*.

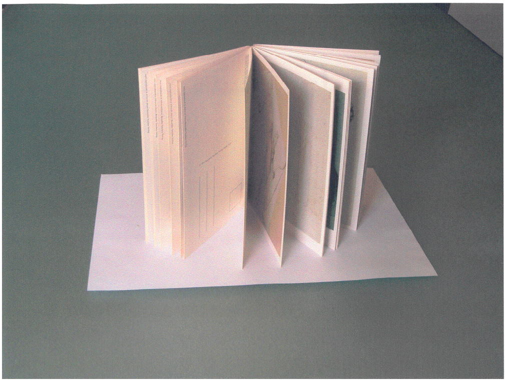

Fig. 4

Jusqu'ici nous avons rencontré des droites et des plans verticaux et horizontaux. Ce sont ceux qui se présentent le plus naturellement à nous, êtres humains qui vivons dans le champ de la pesanteur. Mais il y en a bien d'autres autour de nous, que la géométrie a vocation d'étudier aussi. Donnons-en des exemples.

Une corde tendue peut être tenue dans n'importe quelle direction. Les rayons du soleil tels qu'on les voit filtrer entre deux nuages certains soirs d'orage sont aussi des lignes droites. La ligne de visée du chasseur, qui aligne le cran de mire, le guidon et la cible, est une ligne droite. Lorsque deux plans se coupent, ils le font suivant une droite : c'est le cas par exemple des faces d'une pyramide ou d'un cube.

Il existe de même des plans qui ne sont ni horizontaux ni verticaux. Par exemple les pans d'un toit ou les faces d'une pyramide posée sur sa base.

Une feuille de carton rigide peut être tenue dans une position quelconque. Une lame de scie ou de couteau aussi.

Les bords d'une route droite montante sont des parallèles qui ne sont ni horizontales, ni verticales. Les bords opposés des pages d'un livre sont parallèles, et les bords qui se rencontrent en un même coin de page sont perpendiculaires. Le mât d'un bateau est perpendiculaire au pont, quel que soit le tangage ou le roulis.

Il est intéressant aussi de savoir comment obtenir facilement une ligne droite, un angle droit, des parallèles. Pour obtenir une ligne droite, il suffit de plier une feuille de papier en deux. La règle est un instrument qui matérialise la droite et sert à dessiner des traits droits. On obtient un angle droit en pliant une feuille de papier, puis en repliant le pli sur lui-même. Dès qu'on sait faire un angle droit, on peut obtenir des parallèles, car si deux droites contenues dans un même plan font chacune un angle droit avec une troisième, elles sont parallèles.

Notons enfin deux propriétés remarquables. Tout d'abord, une droite glisse facilement sur une autre sans rompre le contact avec elle. Par exemple, pour autant qu'une tige droite ait un diamètre inférieur au diamètre intérieur d'un tuyau, elle peut glisser longitudinalement à l'intérieur de celui-ci. Ensuite, un plan peut glisser sans contrainte sur un autre. Par exemple, quand un couteau tranche une pomme, le plan de la lame et le plan de coupe coïncident parfaitement.

En résumé, nous percevons le mieux les droites, les plans, les parallèles et les angles droits lorsqu'ils apparaissent en concordance avec les directions verticale et horizontale. Mais, avec un peu d'effort, nous étendons cette connaissance à toutes les directions possibles. Il reste que pour vérifier par exemple si deux droites sont parallèles ou perpendiculaires, nous les amenons spontanément dans la position de meilleure perception, c'est-à-dire dans un plan frontal et dans les directions verticale et horizontale.

Revenons sur ce fait majeur : les droites et les plans que nous observons autour de nous sont beaucoup plus souvent en position verticale ou horizontale que dans d'autres positions. Il contribue à la formation de la pensée géométrique. Imaginons un être humain plongé dans un univers où les droites et les plans apparaîtraient autour de lui dans des positions dues au hasard, c'est-à-dire dans un parfait désordre. Il ne verrait quasiment nulle part de plans ni de droites parallèles ou perpendiculaires. On peut penser qu'un tel être, heureusement hypothétique, développerait une pensée géométrique cohérente beaucoup plus difficilement que l'humanité réelle ne l'a fait. En réalité, nous vivons dans un univers partiellement ordonné, avec un grand nombre de droites et de plans en position privilégiée. Un tel univers est plus intelligible que s'il était désordonné. Les verticales et les horizontales jouent un rôle important dans la formation de la pensée géométrique, même si la géométrie n'atteint sa maturité théorique qu'en éliminant ces données physiques.

1.4. Une géométrie de sens commun

En considérant d'abord les droites verticales et tout de suite après les plans horizontaux, nous avons situé spontanément notre introduction à la géométrie dans l'espace et non dans le plan. Il n'y a rien d'étonnant à cela, puisque l'être humain vit dans l'espace et non dans un plan. Mais cette façon d'aborder les choses est contraire à l'ordre habituel des traités de géométrie. En effet, dans la plupart de ceux-ci, à commencer par Euclide, la géométrie plane dans sa totalité précède la géométrie spatiale ([1]).

Les notions auxquelles nous avons recouru jusqu'ici sont empruntées à^ la pensée commune, ce qui nous a permis de parler sans les définir des droites, des plans, des parallèles et des perpendiculaires, de l'horizontale et de la verticale. Ces notions dérivent de l'expérience et y puisent leur sens. Ce sont des notions non idéalisées. Par exemple, et comme nous l'avons déjà souligné, nous n'avons exigé nulle part que les droites soient non bornées et qu'elles soient extrêmement fines, et pas non plus que les plans soient infinis et dépourvus d'épaisseur. Ces propriétés extrêmes ne deviennent essentielles que si l'on veut assurer d'autres propriétés telles que

> deux droites qui se rencontrent se rencontrent en un point et un seul ;
>
> si une droite a un point commun avec un plan, soit elle est tout entière contenue dans le plan, soit elle n'a que ce seul point en commun avec lui.

De telles propositions ont la forme des axiomes d'une géométrie déductive. Mais, on l'a vu, nous avons été capables d'observer beaucoup de choses instructives sans passer par là.

Qui plus est, nous avons accumulé beaucoup d'observations sans donner priorité à certaines d'entre elles. Tel n'est pas le cas des auteurs qui

([1]) En Italie au début du XX^{e} siècle, certains défendaient l'idée d'enseigner en même temps la géométrie plane et celle de l'espace. On parlait à cet égard de la *fusion* des deux enseignements.

élaborent une *géométrie déductive*. Ceux-là choisissent quelques axiomes et en déduisent tout le reste. Et comme l'a justement observé G. Choquet [1964], dans une telle entreprise, un trop grand nombre d'axiomes serait une source de confusion. Quant à nous, nous pouvons encore ici vivre tranquillement dans un univers où abondent les propriétés de sens commun.

2. Quelques questions d'orientation

Nous avons vu que les droites verticales étaient d'office orientées et que les droites horizontales peuvent l'être. Il existe dans l'environnement quotidien quelques autres questions simples d'orientation. Examinons-les.

2.1. La gauche et la droite

Le corps d'un être humain regardant droit devant lui est symétrique. Bien sûr, son cœur est à gauche et son foie à droite, mais cela ne se voit pas. Il possède donc, à peu de choses près, un plan de symétrie. Ses yeux, ses oreilles, ses mains sont de part et d'autre. Ce plan contient *une verticale orientée* : la tête est en haut et les pieds sont en bas. Ce plan contient aussi *une horizontale orientée* : la personne a les yeux devant et le dos derrière. Par contre, les deux côtés du plan de symétrie sont équivalents : aucun signe visible ne distingue l'un de l'autre. C'est donc par convention qu'un de ses côtés est appelé *gauche* et l'autre *droit*.

Si l'être humain avait un grand bras et un petit, de même que le crabe de la figure 5 a une grande pince et une petite (2), il pourrait rattacher son côté gauche (ou droit) à un signe anatomique particulier.

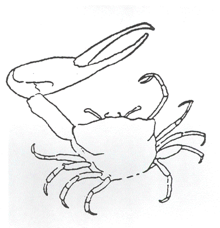

Fig. 5

Cette convention de la gauche et de la droite est liée aux autres orientations : le haut et le bas, l'avant et l'arrière. Pour comprendre cela, regardons

(2) Cette figure a été empruntée à M. Gardner [1985].

un adulte montrant la gauche et la droite à un enfant. Ils sont côte à côte, regardant dans la même direction, et l'adulte dit : lève ton bras du même côté que moi : la gauche (ou la droite) c'est par là.

Mais que ferait l'adulte si, comme ce cerf préhistorique de Sardaigne, tout en ayant un haut et un bas, il avait deux avants et pas d'arrière (voir figure 6) ? Il devrait choisir par convention une de ses deux têtes comme tête avant, et l'orner d'une cocarde pour s'en souvenir. Il pourrait ensuite s'occuper de désigner sa gauche et sa droite.

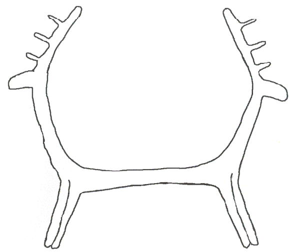

Fig. 6

Il ne suffit pas à l'être humain d'avoir compris ses orientations propres. Encore faut-il qu'il transfère celles-ci aux autres humains, qu'il arrive à reconnaître, par exemple, la gauche et la droite d'une personne qui lui fait face, ou d'une personne couchée. Il y arrive en général en se mettant — fut-ce en pensée — à la place de la personne en question et en se référant alors à sa propre gauche et à sa propre droite. C'est sa façon de passer de la perception subjective de la gauche et de la droite (celle relative à sa propre personne) à une perception objective (relative à un corps quelconque).

Par delà les êtres humains, il y aussi le dessus et le dessous, l'avant et l'arrière ainsi que la gauche et la droite des chiens, des automobiles, des fauteuils, etc. Toutes ces orientations sont déterminées par des causes physiques ou biologiques, la verticale dans tous les cas, le sens de progression pour le chien ou l'auto, la position de la personne assise pour le fauteuil. Au contraire, les questions d'orientation sont traitées, dans la géométrie théorique, de manière abstraite.

2.2. Expliquer un chemin

L'avant et l'arrière, ainsi que la gauche et la droite, ne sont pas seulement des propriétés du corps humain intéressantes par elles-mêmes. En effet, elles ont une fonction dans les déplacements. Pour se rendre d'un point à un autre, on se meut normalement en ligne droite et vers l'avant.

Mais pour contourner les obstacles, on tourne de temps en temps vers la gauche ou la droite.

Il y a en gros trois façons d'expliquer un chemin. La première se réfère autant à la personne elle-même qu'aux éléments stables du parcours. On dit par exemple : tu vas tout droit sur telle distance, au carrefour tu prends sur ta droite, au rond-point tu fais trois quarts de tour, etc. La deuxième façon consiste à prendre pour référence le plus souvent les éléments stables du parcours. Par exemple, dans une ville urbanisée comme New York, on dira : tu vas vers le nord jusqu'à ce que tu vois une pharmacie sur un coin, de là tu vas deux blocs vers l'est, etc. La troisième façon consiste à marquer le trajet sur un plan. Elle supprime toute référence à la personne, puisque les seuls éléments de l'explication sont alors les accidents du parcours, notés sur le plan.

Nous voyons à nouveau ici le passage d'une vue subjective à une conception objective. Ce passage ne va pas de soi, comme en témoignent les difficultés qu'éprouvent certaines personnes à lire un plan.

2.3. L'orientation des figures et des solides

Nous avons vu ci-dessus que l'être humain, étant symétrique, ne peut désigner que par convention celui de ses côtés qu'il appelle *gauche*, et celui qu'il appelle *droite*. Examinons maintenant une autre propriété des corps ou des objets symétriques.

Commençons par les objets plans, en prenant pour premier exemple la lettre D de la figure 7 (a).

Supposons que cette lettre soit découpée dans du carton et posée sur une table. Dessinons-la en la contournant avec un crayon. Ensuite, soulevons-la, retournons-la et posons-la à nouveau sur la table (figure 7 (b)). Nous n'aurons ensuite aucune peine à la faire glisser (cette fois en évitant de la soulever, mais il faut la tourner) pour l'amener à coïncider avec sa trace dessinée. Si nous essayons de faire de même avec le F de la figure 8 (a), nous n'arriverons pas, après l'avoir retourné (figure 8 (b)), à le superposer à sa trace, quelle que soit la façon dont nous le glisserons sur la table.

Il est assez clair que si une figure possède un axe de symétrie, c'est-à-dire si elle apparaît comme notre D, tout à fait pareille de part et d'autre d'une ligne droite (appelée précisément *axe de symétrie*), alors on peut après retournement la faire coïncider avec sa trace.

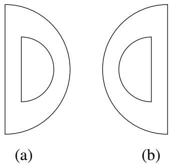

Fig. 7

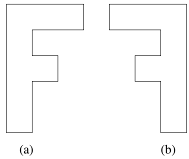

Fig. 8

Réciproquement, si on peut amener une figure à coïncider avec sa trace après retournement, alors cette figure possède un axe de symétrie. Cette propriété réciproque est beaucoup moins évidente que la précédente, et nous ne la démontrerons pas. Ce qui par contre est l'objet d'expériences familières, c'est que certaines figures ont la propriété de pouvoir coïncider avec leur trace après retournement, et que d'autres ne l'ont pas.

Expérience familière soit, mais parfois surprenante. Il est par exemple difficile à dire à l'avance que le parallélogramme de la figure 9 (a) appartient à la première catégorie, et celui de la figure 9 (b) à la seconde. À y regarder de plus près toutefois, on s'aperçoit que celui de gauche possède un axe de symétrie (voir figure 10), tandis que l'autre n'en a pas.

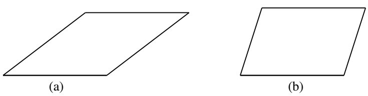

Fig. 9

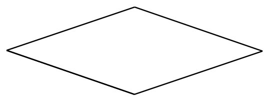

Fig. 10

Ces observations sur les figures en carton que l'on retourne peuvent être interprétées dans un contexte différent si l'on pense à l'effet des miroirs. Passer d'une figure en carton à la même figure retournée a le même effet que passer de cette figure à son image dans un miroir tenu perpendiculairement à la table. Le mécanisme optique par lequel le miroir réalise cela n'est pas évident, mais l'effet est familier : si on pouvait aller derrière le miroir chercher le reflet de la forme en carton, on aurait en main la même chose que la forme en carton retournée.

Ceci dit, voyons maintenant s'il existe dans l'espace comme dans le plan des objets que l'on peut — ou ne peut pas — faire coïncider, après retournement, avec leur trace. Cette question paraît irréaliste, ou même absurde, pour deux raisons. La première est que l'on imagine difficilement de contourner un objet à trois dimensions pour en conserver la trace. On pourrait néanmoins le reproduire en hologramme... La deuxième est que l'on ne peut pas retourner un objet solide comme on retourne un objet plan. Alors qu'on retourne un objet plan au dessus d'un plan, au dessus de quoi retournerait-on un objet à trois dimensions ? Mais par ailleurs, on peut passer d'un solide à son image dans un miroir.

Reposons alors la question en d'autres termes. Considérons un solide, par exemple celui de gauche à la figure 11. Regardons-le dans un miroir et construisons un objet identique à l'image vue dans le miroir. Ce deuxième objet est celui de droite à la figure 11. Question : peut-on superposer ces deux objets ? Ici aussi, on se heurte à une absurdité : on ne peut pas superposer deux objets à trois dimensions, car ils sont impénétrables. Mais on peut tout de même les superposer en pensée. On peut aussi recourir à une astuce. On utilise, au lieu d'un miroir ordinaire, un miroir semi-transparent, qui est une sorte de vitre-miroir. On construit un objet identique à l'objet de gauche, et on le porte derrière la vitre-miroir. On a alors sous les yeux à la fois le reflet de l'objet de départ et sa copie bien matérielle. Comme le reflet est « pénétrable », on peut vérifier si la copie peut coïncider avec le reflet. Dans le cas de la figure 11, on constate qu'effectivement les deux solides sont superposables. Par contre, les deux solides de la figure 12, bien qu'ils soient exactement de même forme et de même grandeur, ne sont pas superposables.

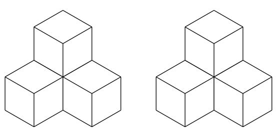

Fig. 11

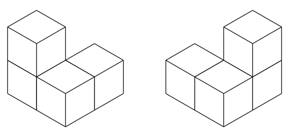

Fig. 12

En conclusion, il existe des objets solides superposables à leur image dans un miroir, et d'autres qui ne le sont pas. Il se fait, mais nous ne nous appesantirons pas ici sur ce point, que ceux de la première catégorie possèdent un plan de symétrie, et les autres non.

Lorsqu'un objet existe ainsi en deux variétés distinctes, images l'une de l'autre dans un miroir, on dit que ces deux variétés sont *énantiomorphes*.

Ce terme savant est moins important que le phénomène très courant qu'il désigne.

Au terme de cette section consacrée aux questions d'orientation, on réalise à nouveau que la géométrie à son début s'enracine dans un univers qui n'est pas seulement géométrique, puisqu'il comprend le corps humain, des animaux, le sens du mouvement et les miroirs.

3. Deux familles de polygones simples

Après avoir examiné les droites, les plans et quelques questions d'orientation, venons-en maintenant aux polygones simples. Mais au lieu de les considérer principalement comme des objets d'étude, apprenons à les *diviser en parties* et à les *assembler*.

3.1. La famille du carré

Commençons par le carré. Nous expliquerons à la section 3.3 pourquoi nous choisissons celui-ci comme premier polygone à manipuler.

La figure 13 montre diverses façons de diviser un carré par des traits droits en 2, 4 et 8 parties superposables. Ces traits joignent des points très particuliers du carré, à savoir des sommets et des milieux de côtés.

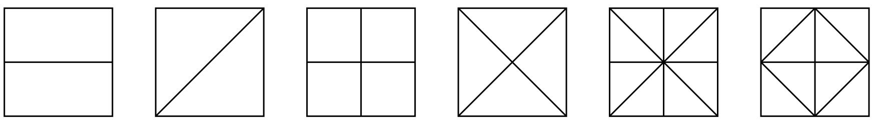

Fig. 13

La figure 14 (a) à (f) montre, outre le carré de départ, un exemplaire de chacune des formes obtenues grâce aux découpages. On a complété cette collection par deux parallélogrammes (figure 14 (g) et (h)). Ceux-ci ont été obtenus en assemblant deux demi-carrés, comme le montre la figure 15, puis en supprimant le côté par lequel ils se touchent. Ces deux dernières figures sont images l'une de l'autre dans un miroir.

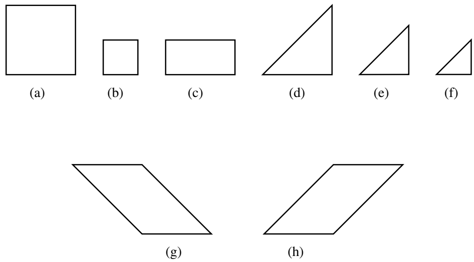

Fig. 14

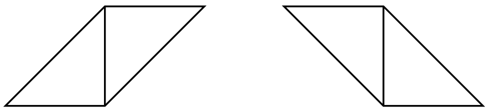

Fig. 15

Les polygones de la figure 14 ont entre eux des liens étroits. Du fait qu'ils sont issus d'un même carré par des divisions et assemblages simples, ils ont entre eux des rapports de longueurs, d'angles et d'aires simples eux aussi. Nous dirons ci-après qu'ils forment *la famille du carré*.

Il est intéressant ensuite d'explorer les combinaisons extrêmement variées que l'on peut tirer de cette famille en lui appliquant à nouveau les deux opérations de *diviser en parties* et *d'assembler*. On découvre ainsi

toutes les façons d'assembler des carrés identiques 2 par 2, 3 par 3 et 4 par 4 (figure 16), ce qui est un exercice de combinatoire géométrique bien connu,

les façons d'assembler de même des triangles (demi-carrés) 2 par 2 et 3 par 3 (figure 17), ce qui est un exercice analogue de combinatoire géométrique, mais qui, en outre, fait apparaître quelques polygones classiques : deux parallélogrammes énantiomorphes, un carré, un trapèze rectangle, un trapèze isocèle,

les façons de faire des carrés avec des carrés (figure 18) et des triangles avec des triangles (figure 19), ce qui constitue une introduction aux figures semblables et à l'étude des rapports de longueurs et d'aires dans les similitudes, mais qui peut aussi être une introduction au théorème de Thalès.

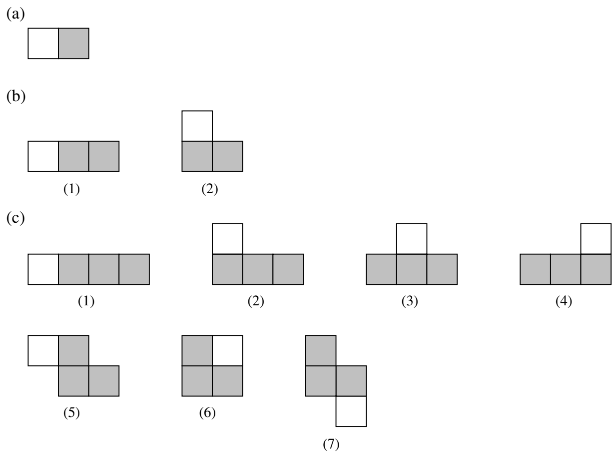

Fig. 16

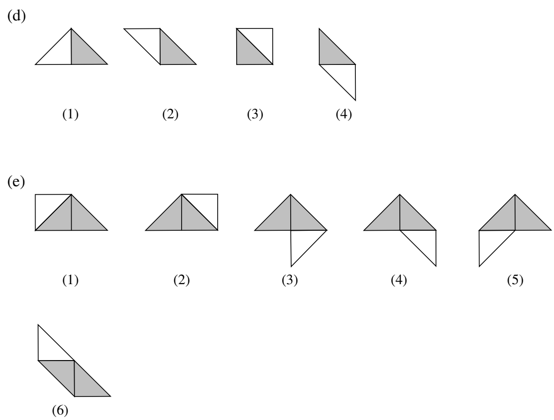

Fig. 17

On découvre des pavages de carrés, de triangles et de parallélogrammes (figure 20). Certains sont familiers, d'autres sont moins communs. Ils invitent à s'intéresser aux pavages non seulement d'un point de vue géométrique, mais aussi dans l'art décoratif des siècles passés. Les pavages conduisent à la théorie des angles de polygones.

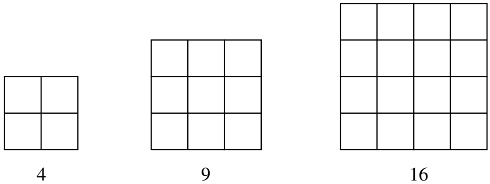

Fig. 18

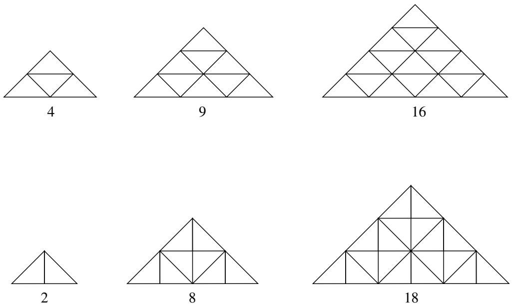

Fig. 19

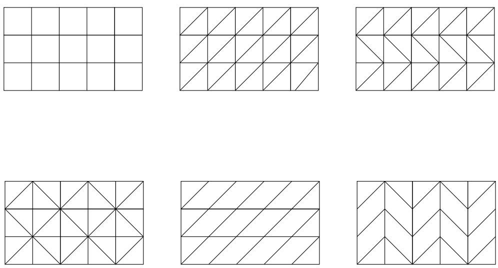

Fig. 20

On apprend à faire deux carrés à partir d'un seul (figure 21), ou en sens inverse, un seul à partir de deux. C'est un problème classique déjà présent dans le Ménon, un célèbre dialogue de Platon, et qui introduit à l'étude de la racine de deux et par là aux nombres irrationnels.

On redécouvre le tangram (figure 22), dont toutes les pièces appartiennent à la famille du carré. Le tangram est un jeu traditionnel chinois d'une extrême ingéniosité. Il est aussi un un outil pédagogique intéressant pour l'étude des fractions et des aires.

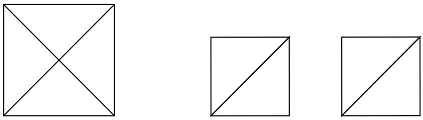

Fig. 21

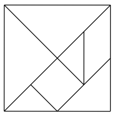

Fig. 22

On peut aussi faire quelques pas vers l'infini en joignant les milieux des côtés du carré pour former un nouveau carré intérieur au premier, puis en joignant les milieux des côtés de celui-ci, et ainsi de suite jusqu'à ce que le nouveau carré à tracer devienne trop petit (figure 23). Il s'agit là d'une suite infinie géométrique, et si on s'intéresse aux aires des carrés successifs, on aboutit à la suite numérique 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... à condition de considérer que l'aire du premier carré est égale à 1.

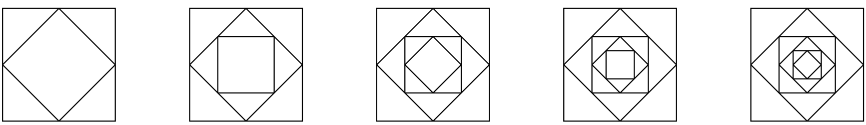

Fig. 23

Avec 2 carrés, on peut former une sorte de cahier à deux feuillets (figure 24 (a)), avec 3 un premier assemblage rigide dans l'espace (figure 24 (b)), avec 4 une boîte presque complète (figure 24 (c)), avec 5 une boîte sans couvercle (figure 24 (d)) et avec 6 une boîte fermée (figure 24 (e)).

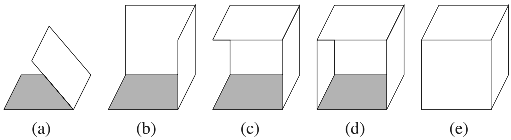

Fig. 24

On peut aussi se convaincre que la figure 25 (a) est bien le développement d'un cube. On peut chercher tous les développements du cube. On peut aussi créer des assemblages de cubes. Et l'imagination peut encore trouver bien d'autres pistes.

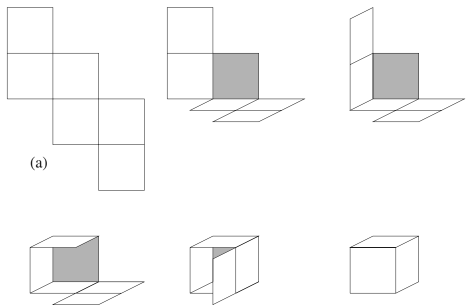

Fig. 25

Nous analyserons à la section 3.3 l'intérêt de la famille du carré et de l'univers des formes que l'on peut en tirer.

3.2. La famille du triangle équilatéral

Après avoir manipulé des carrés et des parties de carrés, voyons maintenant ce que nous pouvons faire d'analogue au départ d'un triangle équilatéral.

La figure 26 montre diverses façons de diviser un triangle équilatéral par des traits droits en 2, 3, 4 et 6 parties superposables. On voit sur la figure 26 (b) que les trois traits de division se coupent en un même point, qu'on appelle *le centre* du triangle. Dans les quatre triangles, les traits de division joignent soit un sommet au milieu du côté opposé, soit dans le cas de la figure 26 (c), le centre du triangle à un sommet, ou encore les milieux de deux côtés.

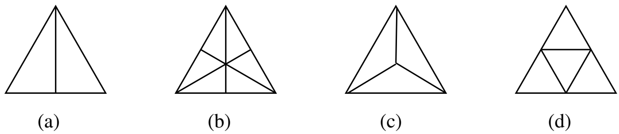

Fig. 26

La figure 27 (a) à (g) montre, outre le triangle de départ, un exemplaire de chacune des formes obtenues grâce aux découpages. On a complété cette collection par un losange, un trapèze et un hexagone (figure 27 (h) à (j)). Ceux-ci ont été obtenus en accolant 2, 3 ou 6 triangles, comme le montre la figure 28, puis en supprimant les côtés par lesquels ils se touchent. Sur la figure 27, les triangles rectangles existent en deux exemplaires, chaque fois images l'un de l'autre dans un miroir.

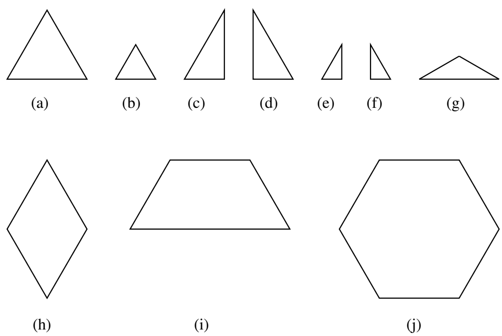

Fig. 27

Comme dans le cas du carré, les polygones de la figure 27 ont entre eux des liens de parenté, avec des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires. Nous dirons qu'ils forment *la famille du triangle équilatéral.*

Explorons maintenant les formes que l'on peut tirer de cette famille en soumettant ses membres à de nouvelles opérations de division en parties et d'assemblage. Les possibilités sont extrêmement nombreuses, aussi nous contenterons-nous de quelques exemples.

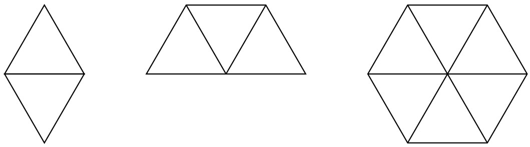

Fig. 28

On peut trouver de nouvelles façons de diviser un triangle (figure 29) ou un hexagone (figure 30), ce qui fait apparaître des figures de deux sortes : certaines ont plusieurs axes de symétrie, alors que d'autres n'en ont pas ; toutes se superposent à elles-mêmes lorsqu'on les tourne d'un tiers de tour autour de leur centre (pour les triangles) et d'un sixième de tour (pour les hexagones).

Fig. 29

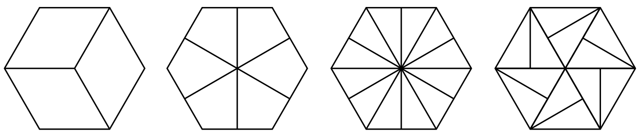

Fig. 30

On peut chercher toutes les façons d'assembler 2 demi-triangles équilatéraux (figure 31). On trouve six combinaisons : un rectangle, deux parallélogrammes, un « cerf-volant », un triangle équilatéral et un triangle isocèle. On peut leur ajouter les deux figures énantiomorphes des deux parallélogrammes.

On peut chercher à faire des triangles avec des triangles (figure 32) et aussi s'apercevoir qu'on n'arrive pas à faire des hexagones avec des hexagones (figure 33).

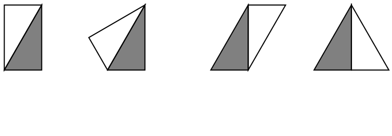

Fig. 31

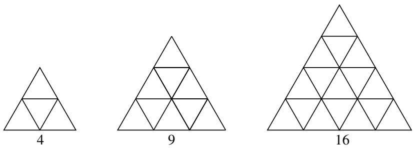

Fig. 32

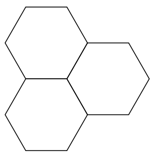

Fig. 33

On peut faire des pavages avec des triangles équilatéraux, des hexagones, des trapèzes (figure 34). Les deux premiers, joints au pavage ordinaire avec des carrés, épuisent la collection des pavages réguliers, ceux qui sont constitués de polygones réguliers identiques à côtés jointifs sur toute leur longueur.

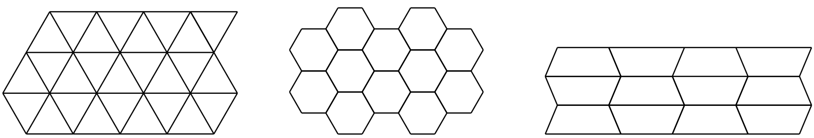

Fig. 34

On peut assembler trois triangles équilatéraux pour former une sorte de cornet à 3 faces. Mais on peut aussi faire un cornet à 4 faces et un à 5 faces (figure 35). Les essais de cornets à six faces conduisent à une figure qui peut être plane : un hexagone régulier.

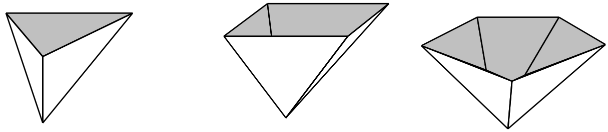

Fig. 35

On peut fermer le cornet à trois faces avec un quatrième triangle, ce qui donne un solide appelé tétraèdre régulier (figure 36). On peut former d'autres solides en accolant deux cornets à 3 faces, deux cornets à 4 faces (figure 37). Ce dernier est un octaèdre régulier. Le cube, le tétraèdre régulier et l'octaèdre régulier constituent les trois premiers polyèdres réguliers, appelés aussi *polyèdres platoniciens*.

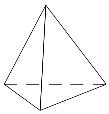

Fig. 36

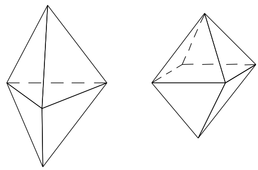

Fig. 37

3.3. Pourquoi des familles de polygones ? Pourquoi ces familles ?

Pourquoi, dans les deux sections précédentes, nous sommes-nous occupés au départ de polygones, et non de surfaces limitées par des courbes, telles que les cercles et les ellipses ? D'abord les polygones accrochent le regard sur ces éléments distincts que sont les côtés, les sommets et les angles. Ceux-ci donnent prise à la pensée et au langage. À l'opposé, le regard glisse le long des courbes. De plus, le fait que les côtés des polygones sont droits a deux conséquences pratiques :

d'abord on reconnaît ou on peut fixer sans peine leur direction, par exemple disposer un côté horizontalement ;

ensuite on peut rapprocher deux polygones jusqu'à ce qu'ils aient deux côtés jointifs, ce qui peut créer une situation géométriquement intéressante.

Deuxième question : pourquoi avons-nous choisi de partir du carré ? D'abord, il s'agit d'une figure familière. Ensuite, cette figure a peu de côtés, ce qui en facilite la perception. On objectera peut-être que le triangle équilatéral, notre deuxième figure de base, en a un de moins. Mais le carré a l'avantage d'avoir quatre angles droits, et de ce fait il cadre bien avec les deux directions physiques de base que sont la verticale et l'horizontale.

Tous les carrés sont semblables. Il s'agit donc d'une figure aisément reconnaissable : quelle que soit sa grandeur, elle ne change pas de forme. Tel n'est pas le cas du rectangle, figure elle aussi familière et possédant quatre angles droits ([2]).

Le carré a des symétries multiples, ce qui a une conséquence majeure : si on part d'un carré de grandeur fixée et si on le soumet aux opérations de base que sont *la division en parties superposables*, *l'assemblage* et *la fusion*, on engendre une famille de formes nouvelles qui ont entre elles des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires. Et donc, comme nous l'avons vu, si on continue à manipuler ces formes par division, assemblage et fusion, on a une probabilité élevée d'obtenir des résultats intéressants. On entend par là des pièces qui s'ajustent bien entre elles, dont les ajustements sont en appel d'une explication géométrique et qui sont donc porteuses d'un savoir théorique ([3]). À la section 3.1, nous avons rassemblé, sous le nom *de famille du carré*, les quelques premières formes issues des manipulations d'un carré, puis nous avons illustré par des exemples l'univers extrêmement riche des formes que l'on peut obtenir en poursuivant les manipulations.

Passons maintenant au triangle équilatéral. Ce que nous en avons fait ressemble à ce que nous avons fait du carré. Il est lui aussi une figure à peu de côtés et très symétrique. Tous les triangles équilatéraux, quelle que soit leur grandeur, ont la même forme. En partant d'un triangle équilatéral de grandeur fixée, on engendre par *division*, *assemblage* et *fusion*, ce que nous avons appelé *la famille du triangle équilatéral*. Il s'agit à nouveau de formes qui ont entre elles des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires, et qui, de ce fait, sont porteuses de phénomènes géométriques multiples et intéressants.

([2]) Le carré est aisément reconnaissable, avec toutefois un certain degré d'imprécision, car il est difficile de s'assurer à l'œil que ses quatre côtés sont de même longueur. C'est sans doute une des raisons qui font qu'il est souvent dans le quotidien confondu avec le rectangle.

([3]) H. Freudenthal [1983] a souligné le rôle de ces ajustements (en anglais *fittings*) dans la formation de la première pensée géométrique.

Par ailleurs, pourquoi avons-nous présenté séparément les deux familles du carré et du triangle équilatéral ? C'est qu'entre ces deux familles, l'entente n'est pas parfaite. Nous avons dit qu'il y avait beaucoup de rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires entre les membres d'une même famille. Tel est beaucoup moins le cas entre les membres des deux familles. Certes, il arrive que les carrés et les triangles équilatéraux, lorsqu'ils ont des côtés de même longueur, s'entendent bien. On le voit par exemple pour les deux pavages de la figure 38. Mais de tels rapports de convenance, porteurs de significations géométriques, sont bien plus nombreux à l'intérieur d'une même famille. Ceci fait que si on explore une famille à la fois, on a bien plus de chances de découvrir des combinaisons intéressantes que si on travaille sur la réunion des deux familles.

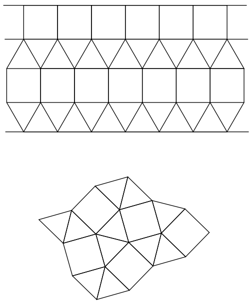

Fig. 38

Un mot d'explication maintenant sur le terme *famille*. En géométrie élémentaire, l'ensemble des trapèzes est parfois appelé *famille* des trapèzes, l'ensemble de parallélogrammes *famille* des parallélogrammes, etc. Mais ces familles sont d'une tout autre nature que celles dont nous avons parlé ci-dessus. Ces sont des familles (des ensembles) qui s'identifient à des concepts et répondent donc à des définitions dépourvues d'ambiguïté. Par contre, ce que nous avons appelé ci-dessus *famille du carré* et *famille du triangle équilatéral* sont des ensembles cernés de façon approximative. On pourrait en ôter ou y ajouter l'un ou l'autre polygone sans qu'elles perdent leur sens, qui est de favoriser l'émergence de phénomènes (de *fittings*). Étant entendu pourtant que les définitions mathématiques sont indispensables, mais que leur fonction est moins de dire ce que sont vraiment les choses définies que d'aider à^ mettre de l'ordre dans les phénomènes et à les comprendre.

Pourquoi nous sommes-nous bornés à présenter deux familles, et non trois, ou quatre ou davantage ? N'existe-t-il pas aussi par exemple une famille du pentagone régulier, et d'autres analogues ? Il est vrai qu'on pourrait proposer une famille du pentagone régulier, mais elle serait déjà un peu à la limite de notre propos. En effet, le pentagone est une figure beaucoup moins familière que le carré et le triangle équilatéral, le nombre 5 est moins accessible à l'intuition que ne le sont 3 et 4, et en outre les parties du pentagone régulier obtenues par division et assemblage ont entre elles des rapports assez complexes. Deux faits corroborent cette affirmation : d'une part, le nombre d'or, qui n'est pas simple, est le rapport que l'on trouve le plus immédiatement dans les pentagones, et d'autre part il n'existe pas de pavage du plan avec des copies d'un pentagone régulier.

3.4. Glisser, tourner, retourner

Voyons maintenant comment on peut s'y prendre pratiquement pour travailler dans la famille du carré ou celle du triangle équilatéral. La chose paraît simple. En partant des polygones de la famille, et pour réaliser l'objectif que l'on se donne, on leur applique dans un ordre judicieux les trois opérations de diviser en parties, assembler et fusionner.

Ces opérations sont toutefois bien distinctes selon le contexte dans lequel on les applique. Pour le montrer, comparons ce qui se passe d'une part lorsqu'on travaille avec des polygones en papier, et d'autre part lorsqu'on utilise un logiciel nouveau appelé Apprenti Géomètre (ci-après, nous dirons simplement AG). On trouvera une brève introduction à ce logiciel en appendice à la présente étude.

On *divise* des polygones en papier en les pliant ou en y traçant des traits à la règle. On peut ensuite les découper. Dans AG, on désigne à la souris les deux extrémités du trait de division, puis on active la commande *découper*.

L'opération d'assembler est plus difficile et plus longue à commenter : nous y viendrons ci-après. Par contre, fusionner est simple dans les deux contextes. Pour fusionner deux polygones en papier jointifs, on les colle au scotch. Pour fusionner deux polygones jointifs à l'écran, on les sélectionne successivement par un clic, puis on active la commande *fusionner*.

En ce qui concerne l'opération d'assembler, expliquons-nous sur un exemple. Supposons d'abord que l'on ait pour consigne de former un losange en assemblant 4 triangles rectangles en papier (des demi-triangles équilatéraux). Les triangles de départ et le losange sont ceux que montre la figure 39.

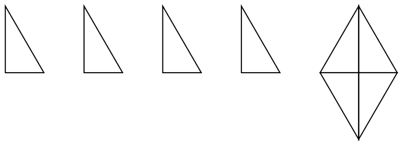

Fig. 39

Supposons d'abord que l'exercice se fasse à partir de triangles en papier. Voici un scénario possible, parmi bien d'autres qui lui ressemblent. Les triangles sont déposés en désordre sur la table, par exemple comme sur la figure 40.

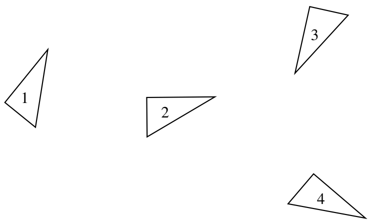

Fig. 40

On rapproche les triangles 1 et 2 en les traînant sur la table (sans les soulever) pour les accoler par un côté. La figure 41 montre les trois résultats possibles. Aucun d'eux ne suggère un « début » de losange.

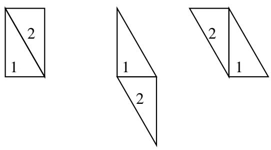

Fig. 41

Une idée est alors de retourner le triangle 2 et de former le triangle équilatéral de la figure 42 (a).

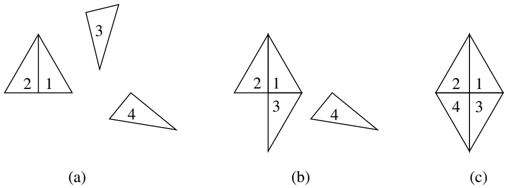

Fig. 42

Ensuite on va chercher le triangle 3 et on le traîne sur la table pour former la figure 42 (b). Et enfin, on amène le triangle 4 en place, toujours en le traînant sur la table (figure 42 (c)).

Voici maintenant un scénario plausible pour répondre à la même consigne, mais en se servant cette fois d'Apprenti Géomètre. La figure 43 donne le film des opérations. Le triangle ombré est dans chaque cas celui qui subit un mouvement.

D'abord on va chercher un triangle dans la famille du triangle équilatéral et on en fabrique 3 autres grâce à la commande *dupliquer*. Ils apparaissent comme sur la figure 43 (a), chacun avec un côté horizontal.

On isole les triangles grâce à la commande *glisser* (figure 43 (b)). Ensuite on essaie d'accoler les triangles 1 et 2. Pour y arriver, on fait d'abord faire un demi-tour au triangle 2, grâce à la commande *tourner* (figure 43 (c)). Ensuite, grâce à la commande *glisser*, on accole ce triangle au triangle 1, ce qui donne l'un des trois résultats que montrent les figures 43 (d), (e) et (f). Rien là qui indique un "début" de losange.

On se ramène alors au cas précédent (figure 44 (a)).

Grâce à la commande *retourner*, on retourne le triangle 2 (figure 44 (b)). On accole ce triangle au triangle 1 grâce à la commande *glisser* (figure 44 (c)). On fait faire un demi-tour au triangle 3 (figure 44 (d)), puis on le fait *glisser* pour l'accoler au triangle 2 (figure 44 (e)). Ensuite, on retourne le triangle 4 (figure 44 (f)), puis on lui fait faire un demi-tour (figure 44 (g)), et enfin on l'amène par glissement en position finale (figure 44 (h)).

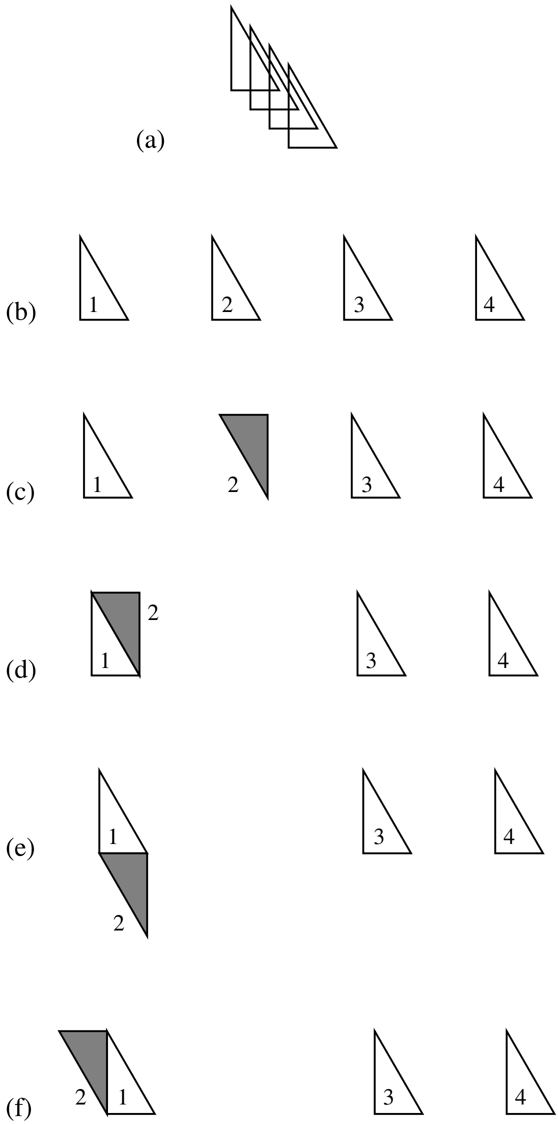

Fig. 43

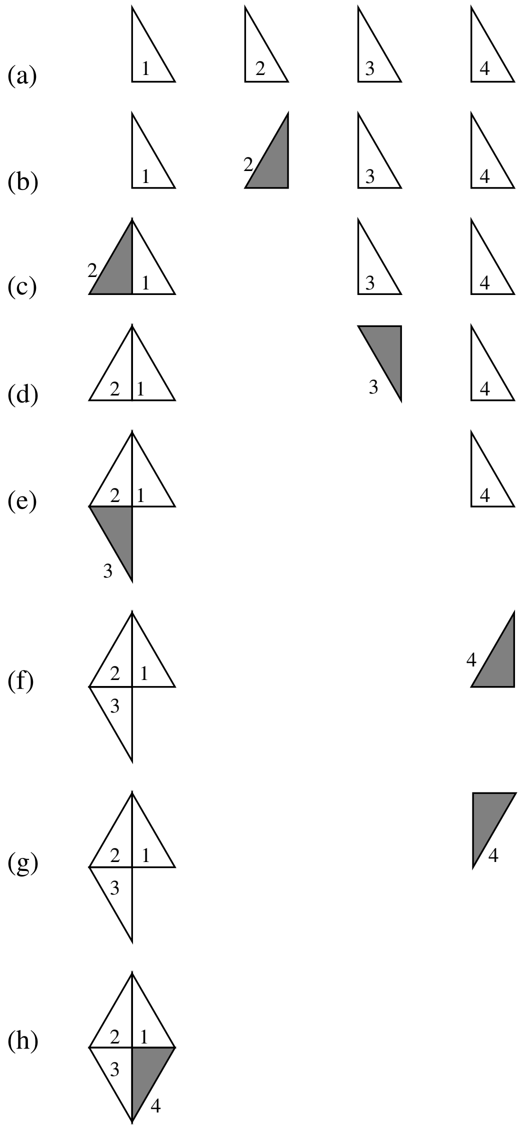

Fig. 44

Voyons maintenant ce qui différencie les deux contextes, celui des triangles — ou plus généralement des polygones — en papier et celui d'Apprenti Géomètre. Les polygones en papier peuvent être déposés sur la table sans être nommés, tandis que ceux d'AG sont amenés à l'écran à l'appel de leur nom dans un menu déroulant. Alors que les figures en papier sont au départ en désordre, celles d'AG apparaissent toujours dans la même orientation (un côté horizontal). Pour modifier celle-ci, il faut une action volontaire : le recours à la commande *tourner*.

Les polygones en papier sortent de la boîte où on les range et tombent sur la table, non seulement en désordre, mais sur une face ou l'autre, au hasard. À l'écran, les polygones apparaissent toujours dans la même variété énantiomorphe (toujours sur la même face pourrait-on dire).

Les actions auxquelles on soumet les polygones en papier peuvent être exécutées sans être nommées, elles peuvent même être mal identifiées et porter sur plusieurs polygones à la fois. Les actions dans AG sont sélectionnées par leur nom, et l'action ne porte jamais que sur un seul objet à la fois.

Les mouvements par lesquels on rapproche deux polygones en papier pour les assembler sont des mouvements libres : on les glisse sur la table en les faisant éventuellement tourner de manière involontaire, on les soulève et ils peuvent retomber au hasard sur l'une ou l'autre face. On peut d'ailleurs en manier plusieurs à la fois. Au contraire, l'utilisateur d'AG doit choisir — consciemment, et donc avec une intention — d'abord le polygone qu'il veut déplacer, puis l'un des trois mouvements *glisser, tourner* et *retourner*. N'importe quel changement de position ne peut être obtenu que par un enchaînement judicieux de *glisser, tourner* et *retourner* : il doit être construit.

Enfin, deux polygones en papier assemblés ne le sont qu'approximativement, étant donné les tremblements de la main et l'imprécision de la vue. De plus, ils s'écartent l'un de l'autre au moindre courant d'air. Dans AG au contraire, une fonction "magnétique" assure un ajustement précis des polygones les uns aux autres. De plus, deux polygones assemblés ne peuvent être dissociés que par recours à une nouvelle commande.

Dernière différence enfin : les manipulations de polygones en papier peuvent se faire en silence, ou s'accompagner de commentaires dans la langue la plus spontanée. Au contraire, chaque action réalisée sur AG est appelée par son nom, tel qu'il apparaît à l'écran ou dans une bulle d'aide.

Cette comparaison des deux contextes ne vise nullement à montrer la supériorité de l'un des deux. Travailler avec des polygones en papier exerce la motricité fine et oblige à s'orienter dans un univers de mouvements inorganisé a priori, dépourvu de contraintes. Travailler dans AG, c'est accéder à un univers où les objets et leurs relations sont très précisément définis et où les mouvements sont simples et chacun désigné par son nom.

De manière plus générale, on peut dire que, comparé au contexte des polygones en papier, celui d'AG est plus ordonné, plus structuré, avec des mouvements décomposés, ce qui contribue à augmenter son intelligibilité.

Bien sûr, la *géométrie théorique* ignore les mouvements et ne connaît que les transformations. Dans celles-ci seules comptent les positions de la figure (des points du plan) au départ et à l'arrivée. Les positions intermédiaires ne comptent pas. Les mouvements de base d'AG s'observent au contraire continûment entre le départ et l'arrivée. Ils n'appartiennent pas à la géométrie théorique, mais ils y conduisent.

4. Des polygones plus généraux

Nous ne nous avancerons guère plus loin dans notre recherche des sources d'une première géométrie. Contentons-nous de quelques indications sur la découverte de polygones plus généraux que ceux rencontrés jusqu'ici.

Nous avons ci-dessus divisé, assemblé et fusionné des polygones très symétriques, en petit nombre. Soumettons maintenant certains de ceux-ci à d'autres opérations. À titre d'exemple, partons du carré.

Un carré construit en tiges articulées peut par déformation donner tous les losanges de la figure 45, ce qui est assez clair puisque les quatre côtés sont égaux au départ et le demeurent.

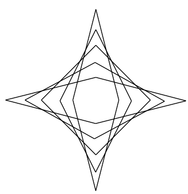

Fig. 45

Deux bandes d'égale largeur croisées à angle droit déterminent un carré. Si on les incline l'une sur l'autre, elles engendrent tous les losanges de la figure 46. Cette propriété est beaucoup moins évidente que la précédente et mérite une démonstration, que nous n'aurons néanmoins pas le loisir de présenter ici.

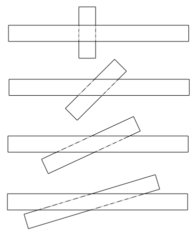

Fig. 46

Si on dispose tous ces losanges les uns sur les autres, on obtient la figure 47.

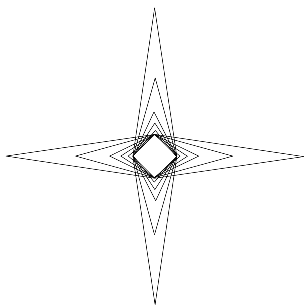

Fig. 47

Partons de deux tiges d'égale longueur articulées en leur milieu et disposées à angle droit. Elles sont les diagonales d'un carré, que l'on peut dessiner en joignant par un trait les extrémités des tiges. En variant l'angle, on obtient tous les rectangles de la figure 48. Il n'est pas trop difficile de voir ici que tous ces rectangles sont inscrits dans un cercle : cela tient à ce que les diagonales des rectangles sont égales et de longueur constante et qu'elles se coupent en leur milieu.

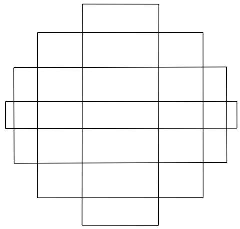

Fig. 48

On noue une ficelle en boucle, puis on la tend entre quatre doigts pour former un carré. On peut alors la déformer en rectangles, et tous les rectangles ainsi formés ont le même périmètre. Ils sont représentés à la figure 49. Le fait que ceux-ci s'inscrivent dans un carré mériterait aussi une démonstration.

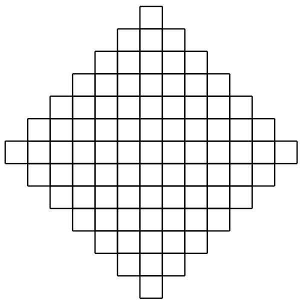

Fig. 49

Chacune de ces quatre façons de déformer un carré engendre une infinité de figures. Une infinité, c'est beaucoup. Et néanmoins, comme on le voit aux figures 45 à 49, on arrive encore à se représenter la totalité des losanges, ou la totalité des rectangles ([4]). Ceci fait que l'on arrive à saisir intuitivement certaines propriétés *du* losange et *du* rectangle, le singulier renvoyant ici à tous les losanges, à tous les rectangles.

Pour s'avancer plus loin dans la géométrie, il faut considérer des figures qui existent dans une telle variété de formes qu'on ne peut plus se les

([4]) La totalité, c'est un peu vite dit : il s'agit de la totalité à similitude près.

représenter dans leur ensemble. Tel est déjà le cas des quadrilatères : ils confondent l'imagination, comme la figure 50 le suggère.

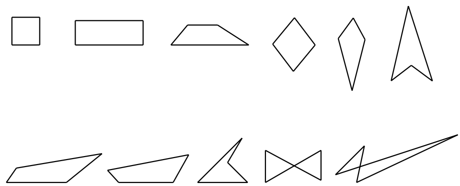

Fig. 50

Et donc si on veut s'assurer de l'une ou l'autre propriété *du* quadrilatère (un singulier qui renvoie à tous!), comme le regard ne suffit à coup sûr plus, il faut nécessairement raisonner. La démonstration prend ici forcément le relais.

5. Pour aller plus loin

Nous avons discerné, aux sources de la géométrie, non seulement des figures, mais des actions sur celles-ci : diviser, assembler, fusionner, articuler, croiser des bandes, nouer et tendre un fil. Il existe un autre type d'actions, générateur d'un savoir géométrique plus avancé : c'est la construction des figures. C'est cette construction qu'il faudrait examiner maintenant pour aller plus loin.

Nous avons aussi trouvé, aux sources de la géométrie, les trois mouvements de glisser, tourner et retourner, qui intervenaient dans les assemblages de figures. Au delà de ces trois mouvements, on trouve les isométries du plan : la translation définie par un segment orienté, la rotation par un centre et un angle, et la symétrie orthogonale par un axe. Et puis il y a les mouvements et les isométries de l'espace.

Et pour aller plus loin encore, il faudrait commencer à mesurer les longueurs, les aires et les volumes.

Mais tout ceci est au delà de notre propos.

6. Appendice : L'univers très ordonné du logiciel Apprenti *Géomètre*

Apprenti *Géomètre* est un logiciel d'aide à l'apprentissage des mathématiques, conçu par le CREM à la demande du Ministère de l'Enfance de la Communauté française de Belgique. Il est disponible en téléchargement libre sur le site internet <www.enseignement.be/geometre>. Voir aussi, dans la bibliographie, M.-F. Van Troeye [2003], ainsi que N. Rouche et Ph. Skilbecq. Ci-après, nous abrégeons Apprenti Géomètre en AG.

Pour les besoins du présent article, il nous suffira de décrire comment, dans ce logiciel, on peut d'abord amener un polygone à l'écran, et ensuite le déplacer ([5]).

Supposons que l'on veuille amener à l'écran un polygone donné, par exemple un triangle rectangle possédant un angle de $\pi/3$ (un demi-triangle équilatéral). Il suffit de le sélectionner dans un menu déroulant, ce qui le fait apparaître à l'écran toujours avec la même taille et dans la même position, à savoir avec un côté horizontal comme le montre la figure 51. On sait qu'un tel triangle existe en deux versions, images l'une de l'autre dans un miroir (voir figure 52) : seule la version (a) apparaît à l'écran.

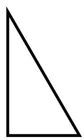

Fig. 51

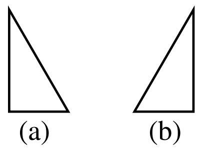

Fig. 52

Il existe trois façons de déplacer ou modifier le triangle.

1) On sélectionne le verbe *glisser* ([6]) dans un menu déroulant. Cela permet de traîner le triangle à la souris jusqu'à un endroit quelconque de l'écran. Pendant tout le transport, le triangle conserve son orientation, avec un côté horizontal.

([5]) AG offre à l'utilisateur deux champs d'expérimentation appelés respectivement le *kit standard* et le *kit libre*. Ce qui suit relève uniquement du kit standard, celui des deux qui est le mieux adapté aux mathématiques élémentaires.

([6]) Dans une première version du logiciel, le verbe en question était *déplacer*.

2) On sélectionne le verbe *tourner* dans un menu déroulant. On peut ensuite faire tourner le triangle, à la souris, d'un angle que l'on détermine à vue. Le centre de la rotation est automatiquement le centre de la figure ([7]), ce qui fait que celle-ci tourne en quelque sorte sur place. L'opérateur ne doit donc pas se soucier de désigner le centre.

3) On sélectionne le verbe *retourner* dans un menu déroulant, puis on clique sur la figure à retourner. Celle-ci subit alors une symétrie orthogonale. L'axe de cette symétrie est invariablement vertical, et passe par le centre de la figure. L'opérateur ne doit pas se soucier de désigner l'axe. La figure se retourne en quelque sorte sur place.

Une combinaison appropriée de ces trois mouvements permet de soumettre la figure à un déplacement ou un retournement quelconque. Chaque mouvement est ainsi nécessairement composé de mouvements élémentaires, on pourrait dire de *mouvements de base*. Il n'existe dans AG aucune possibilité d'emmener librement une figure d'une position à une autre, comme on peut le faire avec un polygone en carton sur une table. Il n'existe aucune possibilité de mouvements "sauvages". En ce sens, AG offre à l'utilisateur un champ d'expériences particulièrement ordonné et intelligible.

Remarquons que si les trois mouvements de *glisser*, *tourner* et *retourner* préfigurent — jusqu'à un certain point — les trois isométries planes de base que sont la translation, la rotation et la symétrie orthogonale, ils ne s'y identifient pas. Nous l'avons dit, le glissement se règle à vue, et l'opérateur ne doit nullement le définir par un vecteur désignant le point d'arrivée d'un point donné de la figure. La rotation s'effectue à vue, l'opérateur n'ayant pas à en désigner le centre et réglant son angle à l'estime. Le retournement est automatique et l'opérateur ne doit pas spécifier la position d'un axe de symétrie. Les transformations en un sens plus technique appartiennent à un stade plus avancé de la géométrie et sont, dans AG, disponibles dans le kit libre.

Merci très amicalement à Thérèse Gilbert pour ses remarques intéressantes sur une première version de cet article, ainsi qu'à Christine Lemaître pour toute l'aide apportée à la mise au point du manuscrit.

([7]) Exactement son centre d'inertie.

Bibliographie

[1] A.-C. Clairaut, *Éléments de géométrie*, Paris, 1741 ; rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1921.

[2] G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964.

[3] H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

[4] M. Gardner, *L'univers ambidextre*, Seuil, Paris, 1985.

[5] E. Mach, *L'analyse des sensations*, 1922 ; trad. fr. F. Eggers et J. Monnoyer, Éditions Jacqueline Chambon, Nîmes, 1996.

[6] M.-F. Van Troeye, coord., *Apprenti Géomètre*, Communauté Française de Belgique et Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), Bruxelles et Nivelles, 2003.

[7] N. Rouche et Ph. Skilbecq, Apprenti *Géomètre* : un nouveau logiciel, Mathématique et Pédagogie, n° 149, 2004, pp. 69-84.

Internet Corner.

Le logiciel allemand **MatheAss** existe à présent en version française. Il peut être téléchargé pour Win 95/98 en version shareware à partir du site

http://home.t-online.de/home/matheass/download.htm

D'un emploi facile, il comprend des rubriques d'algèbre classique (nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, PGCD et PPCM, conversion de nombres décimaux en fractions et réciproque, équations binômes, calcul avec fractions, calcul avec nombres complexes...); il se débrouille bien en géométrie (triangles rectangles, résolution de triangle, polygones, cercles, systèmes de coordonnée, droite par deux points, plan par trois points, sphère par quatre points, intersection dans le plan et l'espace, distance,...). Côté analyse, on y trouve la division des polynômes, un traceur de fonctions, les fonctions par segment, les courbes paramétriques et famille de courbes, les développements en série, le calcul intégral... Un menu gère l'algèbre linéaire et un autre les probabilités élémentaires. À découvrir ...