Engrenages et développantes de cercle

Ginette Cuisinier et Marie-France Guissard

Mots clés : Mouvements, engrenages, courbes planes, développantes de cercle, spirales, technologie

Introduction

Cet article propose une approche des engrenages, basée tout d'abord sur l'observation de leur fonctionnement. Les courbes qui constituent le profil des dents sont le plus souvent des développantes de cercle. Une analyse plus fine du système d'engrènements révèle peu à peu les propriétés géométriques de ces courbes qui sont à la base du fonctionnement harmonieux des engrenages.

1. Transmission du mouvement

Les engrenages sont des pièces qui ont pour rôle de recevoir le mouvement de rotation d'un axe et de le transmettre à un autre, généralement en changeant la vitesse dans un rapport donné.

1.1. Cylindres de friction

Un moyen plus élémentaire pour transmettre le mouvement consiste à utiliser des *cylindres de friction*. Ce sont des cylindres d'axes parallèles dont les surfaces latérales sont mises en contact par pression suivant une génératrice.

On considère deux cylindres C et C' de diamètres respectifs d et d'. Leurs vitesses de rotation exprimées en tours par seconde sont N et N'. S'il n'y a pas de glissement de C sur C', la vitesse tangentielle au point de contact A est la même sur les deux cylindres.

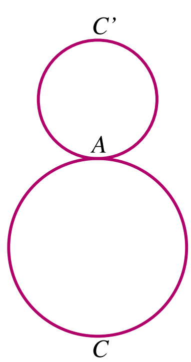

Fig. 1

On l'obtient en multipliant le nombre de tours par seconde par la circonférence du cylindre, ce qui donne

- pour le cylindre C : $v_A = \pi d N$,
- pour le cylindre C' : $v_A = \pi d' N'$.

Ces vitesses sont exprimées en mètres par seconde (m/s) si le diamètre est exprimé en mètres. On en déduit que

$$dN = d'N' \quad \text{et que} \quad \frac{N}{N'} = \frac{d'}{d}.$$

Le rapport des vitesses de rotation des cylindres est égal au rapport inverse de leurs diamètres. Ainsi, par exemple, si le cylindre C a un diamètre deux fois plus grand que celui du cylindre C', sa vitesse de rotation sera deux fois plus petite. Pendant que le cylindre C fait un tour, le cylindre C' en fait deux.

1.2. Engrenages : description et vocabulaire

Pour éviter le glissement, on remplace les cylindres de friction par des *roues dentées*. Il faut alors prendre des cylindres de diamètres un peu plus grands que ceux des cylindres de friction et les tailler de telle sorte que les *dents* de l'un pénètrent dans les *évidements* de l'autre (les évidements sont les espaces entre les dents). Le dispositif ainsi obtenu est un *engrenage* droit, celui de la figure 2 correspond à des cylindres de friction (Cf) de même diamètre.

Il existe différents types d'engrenages comme les engrenages à denture hélicoïdale et les engrenages coniques pour des arbres non parallèles (figure 3).

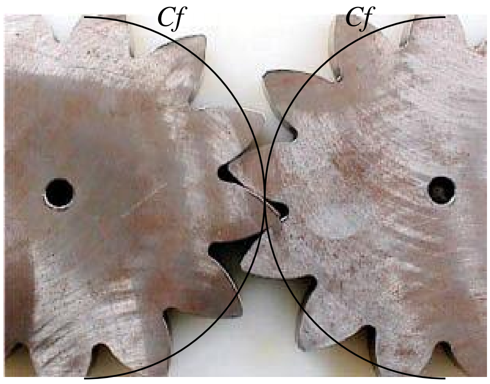

Fig. 2

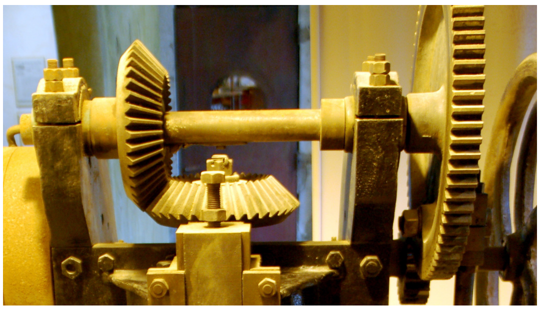

Fig. 3

Dans cet article, nous ne considérerons pas les engrenages coniques, mais uniquement les engrenages droits à denture droite, comme celui dont on voit la plus grande des deux roues à droite dans la figure 3 (la petite roue se devine à l'arrière). Les engrenages droits sont formés de deux roues dentées d'axes parallèles et sont utilisés pour transmettre le mouvement entre deux arbres parallèles. Les dentures droites sont telles que les surfaces qui viennent en contact sont engendrées par des droites parallèles aux axes de rotation des arbres. Toutes les dents d'une même roue sont identiques, ainsi que les évidements.

Les cylindres de friction fictifs remplacés par des roues dentées sont appelés *cylindres primitifs*. On appelle *cercle primitif* la section droite d'un cylindre primitif, son diamètre est le diamètre primitif (noté d_p).

La *surface active* est la portion de la surface d'une dent sur laquelle s'effectuent les contacts avec les dents de l'autre roue.

Le *profil d'une dent* est l'intersection de la surface active et d'un plan perpendiculaire à l'axe de la roue.

Le *pas primitif* est la longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils successifs correspondants.

Pour que deux roues engrènent, il faut qu'elles aient le même pas primitif p. Les largeurs des dents et des évidements, mesurées sur le cercle primitif, sont les mêmes sur les deux roues.

1.3. Observation du fonctionnement

En manipulant l'engrenage, on se rend compte que le mouvement se transmet de manière très régulière. On imagine bien que cette régularité de la transmission du mouvement est liée à la forme des dents. Cette observation motive l'étude des propriétés géométriques de la courbe du profil des dents.

Observons et analysons en détails le mouvement de deux roues d'engrenages de même diamètre qui engrènent. Toutes les dents des deux roues sont donc identiques. On fait tourner à la main cet engrenage dont les arbres sont fixés sur une planche. Si on fait tourner la roue de droite dans le sens horlogique, elle entraîne la roue de gauche dans le sens contraire. Des photos représentant six positions très voisines du système servent de support à des constructions permettant de découvrir quelques propriétés géométriques. On observe que deux dents en contact ont une tangente commune au point de contact situé en T dans la position initiale. Sur chaque photo, on repère le nouveau point de contact des deux profils et on trace à vue la tangente commune. Ensuite, on construit la perpendiculaire à cette tangente et on observe comment évolue cette normale lorsque la roue tourne. Les figures 4 à 9 illustrent ce travail.

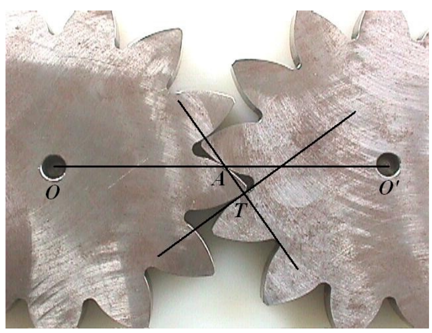

Fig. 4

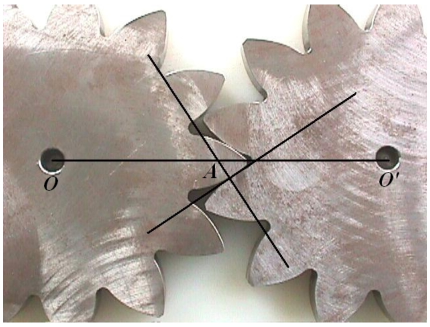

Fig. 5

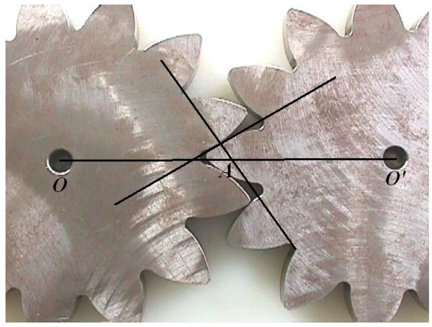

Fig. 9

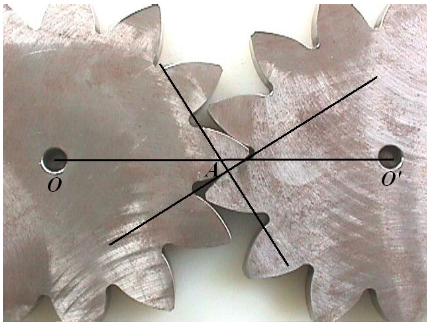

Fig. 6

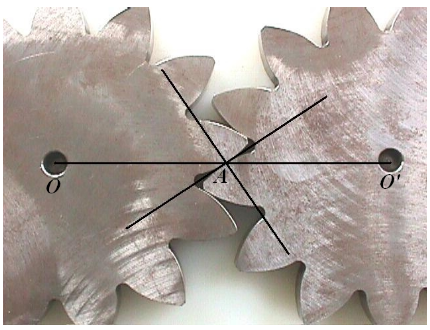

Fig. 7

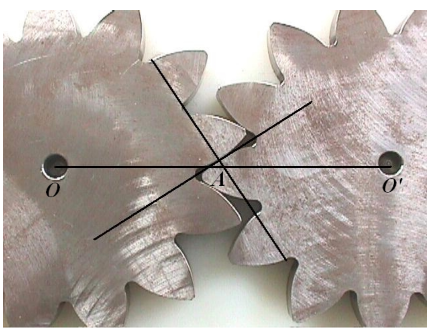

Fig. 8

Ces constructions montrent que la tangente et la normale au point de contact semblent garder constamment une même direction pendant toute la durée du contact. De plus, la normale coupe la droite OO' en son milieu et est donc fixe pendant toute la durée de l'engrènement.

Le point de contact des deux profils mobiles, situé à l'intersection de la tangente et de la normale dont la position est fixe, reste donc sur une droite fixe. Cette propriété est étonnante.

À chaque instant, les courbes occupent une position différente, le point de contact est un point mobile sur chacune de ces courbes, mais la normale commune à ces courbes au point de contact est une droite fixe.

La position particulière du point A, au milieu de $[OO']$ dans notre exemple, est due au fait que les deux roues ont le même diamètre. On conjecture que si les roues ont des diamètres différents, le point A, point d'intersection de la normale avec la droite des centres, occupe une autre position sur OO'.

Le profil de la dent possède donc la propriété suivante : lorsqu'il tourne autour du centre de la roue, il reste perpendiculaire à une droite fixe ([1]) pendant toute la durée du contact. Il existe une courbe qui possède une telle propriété, c'est la *développante de cercle*. La plupart des profils de denture utilisés de nos jours ont la forme d'une développante de cercle et c'est le cas pour l'engrenage que nous venons d'observer.

Nous allons donc nous consacrer à présent à l'étude de cette courbe et de ses propriétés géométriques.

([1]) Nous dirons qu'une courbe est *perpendiculaire* à une droite si la droite est normale à la courbe.

2. La développante de cercle

2.1. Définition et construction

Lorsqu'on déroule un fil enroulé autour d'un cercle en le maintenant bien tendu, son extrémité décrit une courbe qui est appelée *développante de cercle*.

Plus précisément, on définit la développante de cercle de la manière suivante : c'est la courbe décrite par un point P d'une droite qui roule sans glisser sur un cercle appelé *cercle de base*. Ainsi sur la figure 10 le point P passe par les positions P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ... qui sont des points d'une développante γ. Le point P_1 est appelé point de départ.

Pour la construire, on divise le cercle en un certain nombre de parties (douze sur la figure 10) à partir du point de départ P_1. Celui-ci est l'extrémité d'un fil imaginaire entièrement enroulé autour du cercle. Appelons T_2, T_3, T_4, ... les points qui divisent le cercle en 12. Par T_2, traçons la tangente au cercle. En pensant à l'image du fil que l'on déroule, on situe un deuxième point de la développante en P_2 sur la partie supérieure de la tangente, qui est tel que la longueur $|T_2P_2|$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{T_2P_1}$. De la même manière, nous déterminons un troisième point P_3 tel que $|T_3P_3|$ égale la longueur de l'arc $\overset{\frown}{T_3P_1}$. On continue de cette manière pour chaque point de division du cercle.

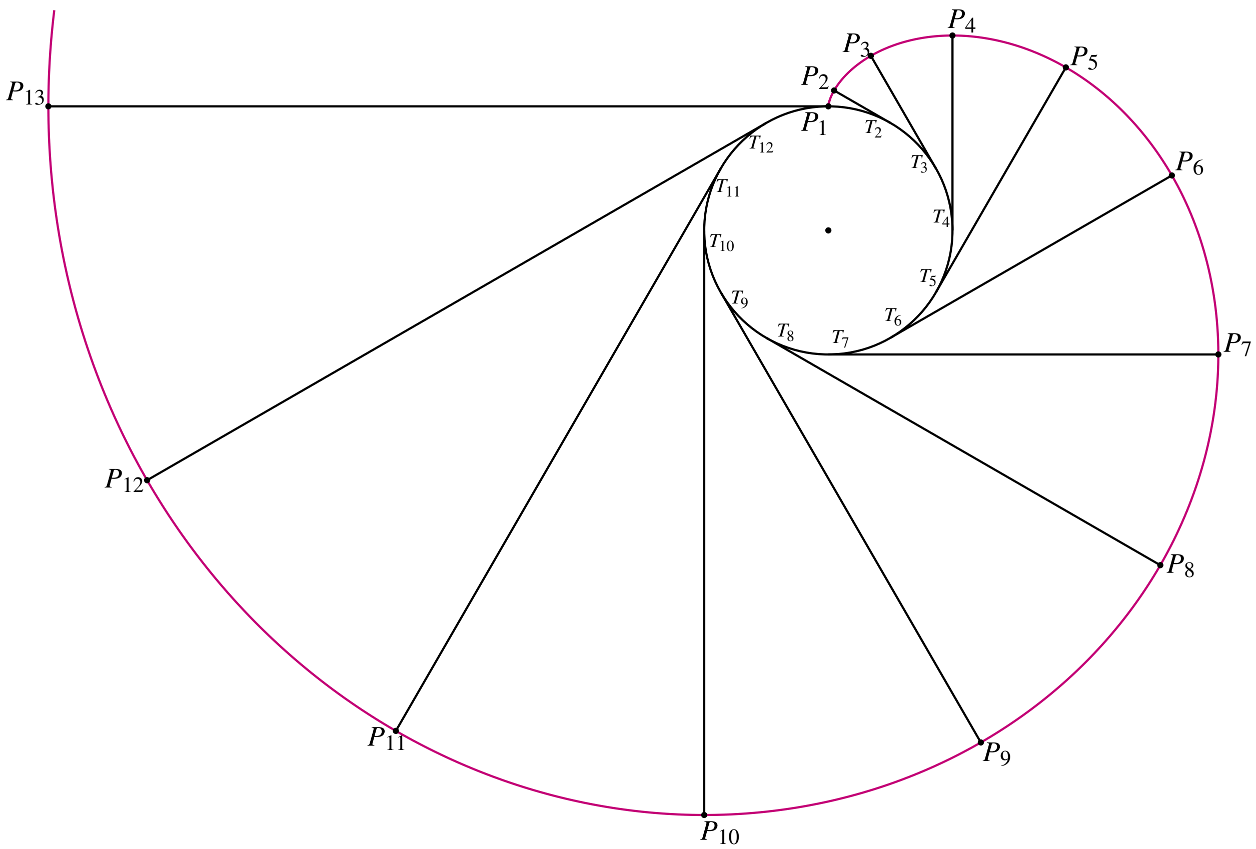

Fig. 10

Après un tour complet, le point de contact revient au point P_1. La tangente en P_1 est horizontale et le point P_{13} à gauche de P_1 tel que la longueur du fil tendu est égale à un tour complet du cercle.

La développante ne s'arrête pas ici, nous pourrions continuer de la tracer en faisant un deuxième tour, puis un troisième... Sa longueur est donc infinie.

L'autre partie de la courbe est obtenue par la trajectoire du point P lorsque la droite roule sur le cercle en allant vers la gauche, le point P engendre alors l'autre moitié de la développante. Les deux parties de la courbe sont symétriques l'une de l'autre par rapport au diamètre passant par P_1. La spirale ainsi obtenue est la développante de cercle, la figure 11 illustre cette courbe limitée à un tour dans chaque sens.

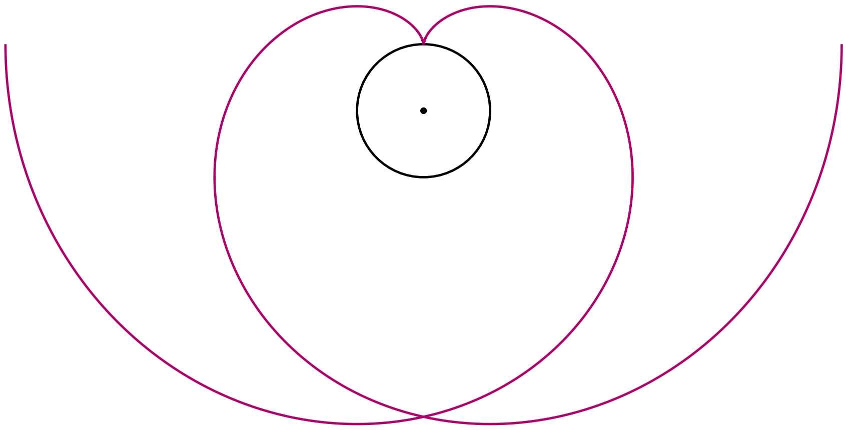

Fig. 11

2.2. Équations de la développante

Soit $Q(r, 0)$ le point de départ de la courbe, et T le point de contact d'une droite qui roule sans glisser sur le cercle (figure 12). Notons t la mesure en radians de l'angle $\widehat{QOT}$ et calculons les coordonnées cartésiennes d'un point P quelconque de la développante.

Le point P est déterminé par l'équation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP}$. La longueur du segment $[PT]$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{QT}$ dont la mesure est rt.

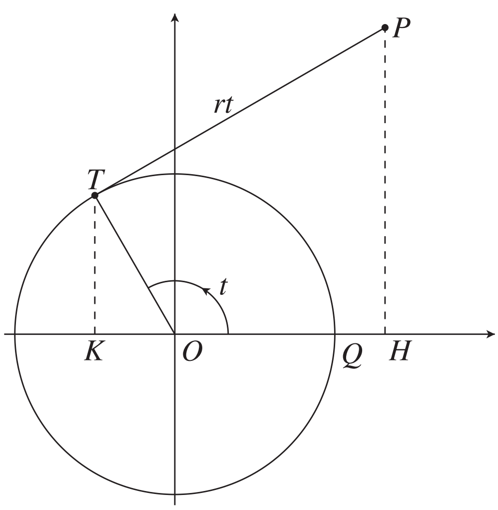

Fig. 12

On trouve pour le vecteur $\overrightarrow{OT}$

$$\overrightarrow{OT} = r\cos t \cdot \overrightarrow{e_1} + r\sin t \cdot \overrightarrow{e_2},$$

et pour le vecteur $\overrightarrow{TP}$

$$\overrightarrow{TP} = rt\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{e_1} + rt\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{TP} = rt\sin t \cdot \overrightarrow{e_1} - rt\cos t \cdot \overrightarrow{e_2}.$$

En effectuant la somme de ces deux vecteurs et en séparant les composantes, on obtient les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = r\cos t + rt\sin t \\ y = r\sin t - rt\cos t. \end{cases}$$

2.3. Propriété de la développante

La manipulation suivante permet d'observer une propriété très particulière de la développante de cercle. Il faut disposer de deux photocopies de la figure 10, l'une sur papier, l'autre sur transparent.

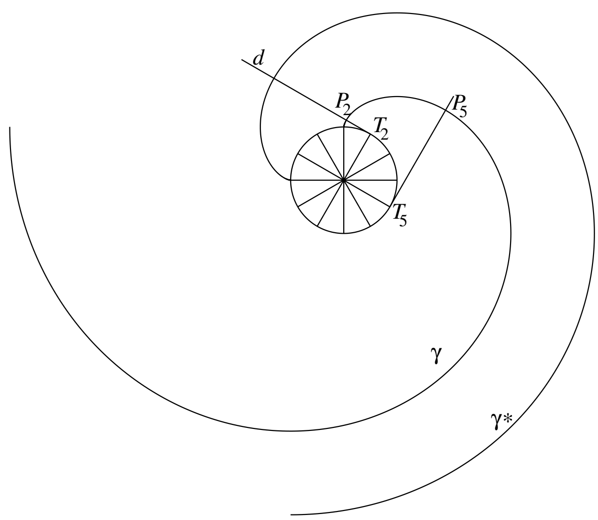

Fig. 13

Sur le papier, on prolonge en couleur la demi-tangente en T_2 du côté de P_2. Ensuite, on superpose le transparent et la figure, on fixe les centres par une épingle et on fait tourner le transparent autour du centre. En faisant la manipulation, on observe qu'en tournant, la développante γ semble être constamment perpendiculaire à la demi-droite colorée d, tangente au cercle de base.

Cela nous amène à conjecturer la propriété suivante.

Propriété : *En chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à une tangente au cercle de base issue de ce point.*

Nous proposons ci-après deux approches différentes pour expliquer cette propriété. Chaque lecteur choisira celle qui le convainc le mieux.

Démonstration analytique :

Plaçons l'origine du repère orthonormé au centre du cercle de base et l'axe Ox de telle sorte que le point de départ Q de la développante corresponde à l'angle nul, comme dans la figure 12. La mesure en radians de l'angle $\widehat{QOT}$ est le paramètre t.

À chaque position du point T sur le cercle, correspond pour la même valeur du paramètre un point P de la développante. Montrons que pour chaque valeur du paramètre, le vecteur tangent au cercle de base et le vecteur tangent à la développante sont perpendiculaires.

Les équations paramétriques du cercle et de la développante sont respectivement (figure 12)

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = r\cos t + rt\sin t \\ y = r\sin t - rt\cos t. \end{cases}$$

En dérivant chacun des deux systèmes par rapport à t, on trouve les composantes du vecteur tangent au cercle et à la développante.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\sin t \\ \frac{dy}{dt} = r\cos t \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rt\cos t \\ \frac{dy}{dt} = rt\sin t. \end{cases}$$

Le produit scalaire des vecteurs tangents

$$\begin{aligned} &(-r\sin t\ \overrightarrow{e_1} + r\cos t\ \overrightarrow{e_2})\cdot \\ &(rt\cos t\ \overrightarrow{e_1} + rt\sin t\ \overrightarrow{e_2}) = \\ &(-r\sin t)\cdot(rt\cos t) + (r\cos t)\cdot(rt\sin t) \end{aligned}$$

est nul, ce qui établit qu'en chaque point d'une développante, le vecteur tangent au cercle de base issu de ce point et le vecteur tangent à la développante sont perpendiculaires.

Démonstration intuitive :

Rappelons que la figure 10 a été construite en considérant la développante comme trajectoire d'un point fixe d'une droite qui tourne sans glisser sur le cercle. Lorsque la droite est dans la position T_4P_4, le point T_4 de cette droite est au repos puisque les points au-dessus de T_4 vont vers la droite et ceux qui sont en dessous vont vers la gauche. Le point T_4 est donc un centre instantané de rotation et pendant un laps de temps infiniment petit, le mouvement de P_4 se fait sur un arc de cercle infiniment petit dont le centre est le point T_4. Si on reprend l'image du fil que l'on déroule, on peut admettre que, pendant un laps de temps infiniment petit, l'extrémité du fil décrit un arc de cercle dont le centre est le point où le fil quitte le cercle. La développante est donc constituée d'une infinité d'arcs de cercle infiniment petits et dont les rayons sont de plus en plus grands. Or la tangente en un point à un arc de cercle est perpendiculaire au rayon passant par ce point. On en déduit, qu'en chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à la tangente au cercle de base qui a servi à la construction de ce point. Autrement dit, la développante est perpendiculaire à cette droite.

De la même manière, on explique qu'en chacun de ses points la demi-tangente P_4T_4 (ou n'importe quelle autre demi-tangente) est perpendiculaire à la développante qui la coupe en ce point. Il suffit de considérer ce point d'intersection comme le point de la droite qui engendre cette développante.

Expliquons encore autrement cette propriété en revenant à l'expérience avec le transparent. Nous savons que, en P_5 par exemple, γ est perpendiculaire à P_5T_5 (Figure 13). Si le cercle de base tourne, γ et P_5T_5 tournent en restant perpendiculaires l'une à l'autre. Ainsi en faisant tourner le cercle, on amène P_5T_5 sur la demi-droite d, tangente au cercle en T_2, γ se superpose à $\gamma*$ (développante issue de T_{10}) et donc d est bien perpendiculaire à $\gamma*$.

De même, en un quelconque de ses points, une développante est perpendiculaire à une des tangentes au cercle de base issues de ce point.

Si une développante tourne autour du centre du cercle de base, elle reste toujours perpendiculaire à une tangente choisie. Le profil d'une dent d'engrenage en développante de cercle reste donc toujours perpendiculaire à une même droite.

3. Construction et fonctionnement

3.1. Construction des profils en développante de cercle de deux dents en contact

Nous avons observé qu'un engrenage est composé de deux roues dentées dont les profils de dents sont perpendiculaires à une même droite lorsqu'ils sont en contact.

On choisit deux cercles de base de centres O et O', de rayons r et $r' = 2r$ qui vont servir de cercles de base pour construire deux profils de dents en développantes.

Supposons d'abord que les deux développantes sont en contact en un point de OO' et déterminons où doit se trouver ce point de contact pour qu'elles soient toutes deux perpendiculaires à une même droite.

En chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à une tangente à son cercle de base. Pour qu'en un point une droite d soit perpendiculaire à deux développantes de deux cercles différents, il faut donc que d soit tangente commune aux deux cercles de base.

Pour que deux développantes soient, en leur point de contact, toutes deux perpendiculaires à une même droite, leur point de contact doit être sur la tangente commune aux deux cercles de base.

Nous choisirons une tangente intérieure, notée d, pour que le point d'intersection de la tangente commune avec la droite des centres soit sur le segment $[OO']$. Notons A ce point, position particulière du point de contact des deux développantes. On peut calculer la position du point A sur la droite OO'. Appelons respectivement T et T' les deux points de contact de d avec les cercles.

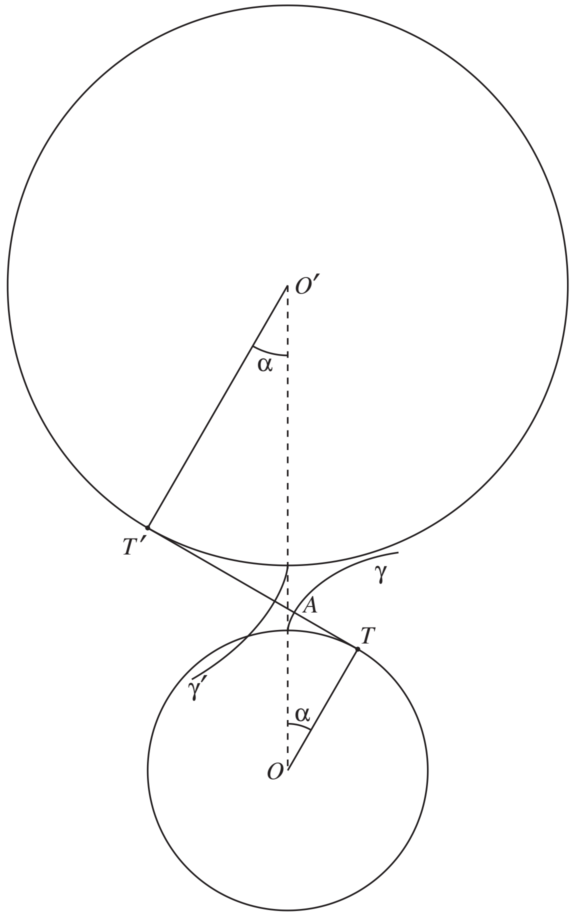

Fig. 14

On remarque que, si d forme un angle α avec la direction horizontale, les angles $\widehat{AOT}$ et $\widehat{AO'T'}$ valent également α. Les triangles AOT et $AO'T'$ de la figure 14 sont semblables, de rapport de similitude 2. Le point A est donc le point de $[OO']$ tel que $|O'A| = 2|OA|$.

Si nous traçons les deux développantes γ et γ' en plaçant leurs points de départ sur le segment $[OO']$, les développantes sont toutes deux perpendiculaires à d mais ne se touchent pas. Pour que les deux développantes représentent deux profils de dents en contact, il faut de plus qu'elles aient un point commun.

Déterminons leur point de départ respectif D et D' sur leur cercle de base pour qu'elles soient en contact en A. Pour cela, calculons les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{AO'D'}$ (voir la figure 15).

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{DT}$ est égale à celle du segment $[TA]$ et dans le triangle OAT, on a

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|TA|}{|OT|} \quad \text{et donc} \quad |TA| = |OT|\mathrm{tg}\alpha.$$

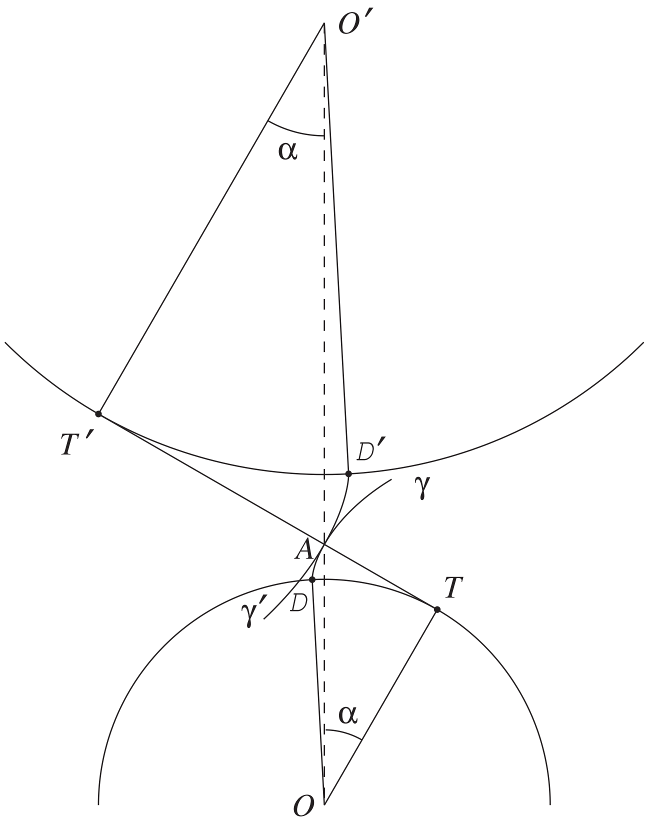

Fig. 15

Comme la mesure d'un angle en radian est égale au rapport entre la longueur de cet arc et la longueur du rayon, on a :

$$\widehat{TOD} \text{ (en rad)} = \text{tg}\alpha$$

et

$$\widehat{AOD} \text{ (en rad)} = \text{tg}\alpha - \alpha.$$

De la même manière, on trouve $\widehat{AO'D'}$ (en rad) = $\text{tg}\alpha - \alpha$. Nous connaissons à présent le point de départ de chaque développante, il reste à les tracer. Les deux développantes en contact sont perpendiculaires à une même droite et ont donc une tangente commune. Le contact est donc parfait.

3.2. Fonctionnement

Nous allons enfin comprendre comment fonctionne un engrenage. Nous avons construit pas à pas deux courbes pouvant représenter les profils de dents en contact. Ce sont deux développantes de cercle γ et γ' dont les points de départ sont respectivement D et D'.

Si on fait tourner la petite roue dans le sens trigonométrique d'un angle δ, pas trop grand, la grande roue est entraînée dans le mouvement. De quel angle tourne alors la grande roue ?

Sur la figure 16, les courbes γ et γ' représentent les profils de dents lorsque leur point de contact est en A. Lorsqu'on fait tourner la petite roue d'un angle δ, le point D va en D_1, le profil γ va tourner et en même temps pousser γ'. Les courbes γ_1 et γ_1' représentent la nouvelle position des deux développantes. Les développantes γ_1 et γ_1' restent en contact et gardent une normale commune qui est la droite TT'. Si D va en D_1, le nouveau point de contact Q des développantes est donc sur TT' et tel que la longueur de l'arc $\widehat{DD_1} = |AQ|$. Mais si A va en Q, le point de départ de γ', D', va en D_1' qui est tel que la longueur de l'arc $\widehat{D'D_1'} = |AQ|$. Donc si le petit cercle tourne d'un angle δ, le point D sur ce cercle se déplace d'un arc de longueur $\delta \cdot r$ et D' se déplace d'un arc de longueur $\delta' \cdot r'$ tel que $\delta \cdot r = \delta' \cdot r'$ sur le grand cercle.

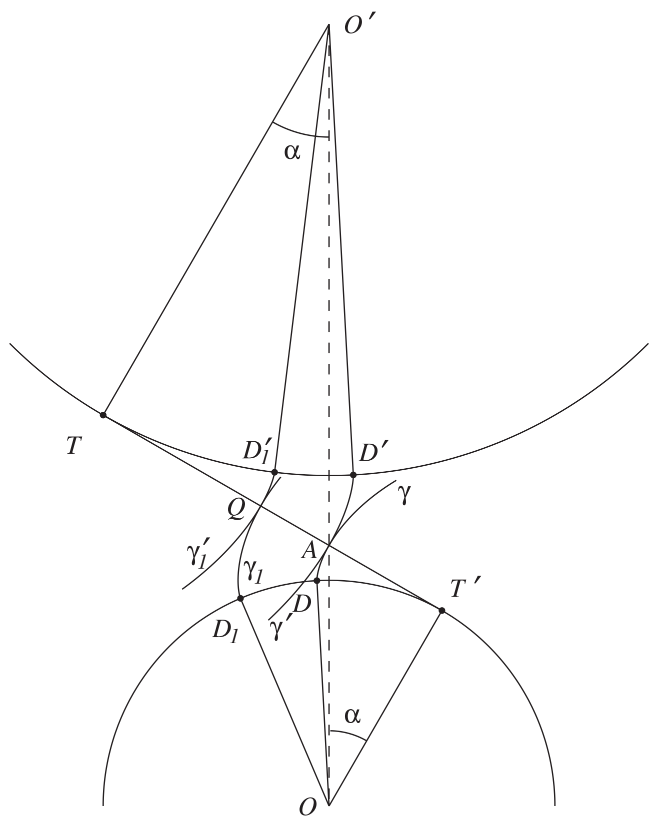

Fig. 16

L'angle δ' dont a tourné le grand cercle est donc $\delta' = \delta \dfrac{r}{r'}$.

Dans l'exemple, comme $r' = 2r$, le grand cercle tourne d'un angle $\frac{\delta}{2}$ lorsque le petit cercle tourne d'un angle δ. Si le rapport des diamètres des cercles de base est 2, le petit cercle fait donc deux tours chaque fois que le grand en fait un. Si d et d' sont les diamètres des cercles de base, N et N' leurs vitesses en nombre de tours par seconde, on a les relations

$$\frac{d'}{d} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{N'}{N} = \frac{1}{2}.$$

Les rapports $\frac{d'}{d}$ et $\frac{N'}{N}$ sont inverses.

Ces relations sont les mêmes que celles que l'on a obtenues pour deux cylindres primitifs de centre O et O' et dont les diamètres seraient dans un rapport $1/2$, c'est-à-dire deux cylindres de friction qui seraient tangents en A.

Si le rapport des diamètres est différent de 2, les résultats restent valables. De manière générale, si d et d' sont les diamètres des cercles de base, N et N' le nombre de tours par seconde, on a la relation : $\frac{d'}{d} = \frac{N}{N'}$. Cette relation est la même que pour deux cylindres de friction dont les centres sont confondus avec ceux des cercles de bases et dont les diamètres d_p et d'_p sont dans le même rapport que d et d'. Les sections de ces deux cylindres (les cercles primitifs) seraient tangents en A, point d'intersection de la droite des centres et de la tangente commune aux deux cercles de base. Le point A est appelé *point d'engrènement*.

Grâce au profil des dents en développante de cercle, un engrenage produit le même effet que deux cylindres de friction *parfaits*, c'est-à-dire qui roulent l'un sur l'autre sans *aucun glissement*. Cela a pour conséquence que le rapport des vitesses de rotation des roues est parfaitement constant. Ces engrenages permettent donc une transmission d'énergie constante.

De plus, au point A, le frottement entre les dents est nul. En effet, en ce point, les vitesses tangentielles des deux cercles primitifs sont égales. En décomposant ces vitesses selon la tangente commune et la normale commune aux deux dents en contact, on trouve l'égalité entre les deux composantes selon la tangente commune. Donc, au point d'engrènement, les dents roulent l'une sur l'autre sans glissement. Il y a absence de frottement.

Il s'agit là d'une propriété mécanique extrêmement importante. Comme les dents roulent l'une sur l'autre, il n'y a ni échauffement, ni perte d'énergie, provoqués par un phénomène de glissement. En s'arrangeant pour que la zone de contact effective des deux dents se situe toujours autour du point d'engrènement, on peut réduire le glissement au minimum et donc la perte d'énergie due aux frottements. Les engrenages à dentures en développante de cercle peuvent donc atteindre des rendements extrêmement élevés.

Pour ces raisons, les engrenages dont les dents sont en développantes de cercles restent gagnants. Bien qu'ils soient complexes et coûteux, leur utilisation s'est généralisée dans la plupart des applications car ils sont les plus efficaces.

Pour en savoir plus

[1] Caterpillar, *Cours d'engrenages*, Caterpillar Belgium S.A. Division Training.

[2] Deletrain, M. et Goffart, B., *Les spirales, de vieilles figures pour un enseignement vivant de la géométrie*, Mémoire de licence, Université Catholique de Louvain, 1986.

[3] Henriot, G., *Traité théorique et pratique des engrenages*, tome 1, théorie et technologie, 5e édition, Dunod, Paris, 1968.

[4] Klein. F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint : Geometry*, translated from the third german edition, Dover publications, 2004.

Ginette Cuisinier est membre du GEM (Groupe d'Enseignement des Mathématiques), ginette.cuisinier@scarlet.be,
Marie-France Guissard est chercheuse au CREM (Centre de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques), guissardmf@crem.be.