Chapitre 12

Couper en deux, c'est bête comme chou ! Voire

Comment couper en deux parties « égales » un disque, un carré, un rectangle et quelques autres formes géométriques communes ? Bien que ce thème de réflexion soit tout à fait élémentaire, nous proposons au lecteur de s'y arrêter un moment, ciseaux en main. Les formes à couper en deux sont celles de la Fig. 1 (page 102). L'idée est de laisser courir son imagination pour voir de quels apprentissages géométriques ce thème est porteur.

Une fois cette exploration terminée, le lecteur est invité à raconter sa démarche par écrit en expliquant non seulement les phénomènes mathématiques rencontrés, mais aussi les péripéties de sa pensée en recherche ; conjectures, exemples, contre-exemples, points de méthode réinvestissables dans d'autres explorations, surprises, espoirs, fatigue, contentement.

Ceci fait, il pourra lire la suite du texte et s'apercevra, c'est certain, qu'il a découvert des choses auxquelles l'auteur n'a pas pensé, et réciproquement.

Il pourra aussi, s'il est enseignant, s'inspirer de ce qu'il aura fait et lu pour stimuler ses élèves.

Bien entendu, rien n'empêche le lecteur pressé de court-circuiter toutes ces propositions et de prendre d'emblée connaissance du texte.

1. Couper des formes en deux.

Mon idée* est de couper des formes géométriques (celles de la Fig. 1) en deux parts égales.

Égal, pris ici au sens familier, signifie *de même aire*. Ci-après on dira plutôt *équivalent*, pour éviter une confusion avec l'égalité mathématique.

Considérer tout un lot de formes provoque des comparaisons. Les ressemblances et les contrastes stimulent la pensée. Couper un seul objet en deux aurait beaucoup moins de sens.

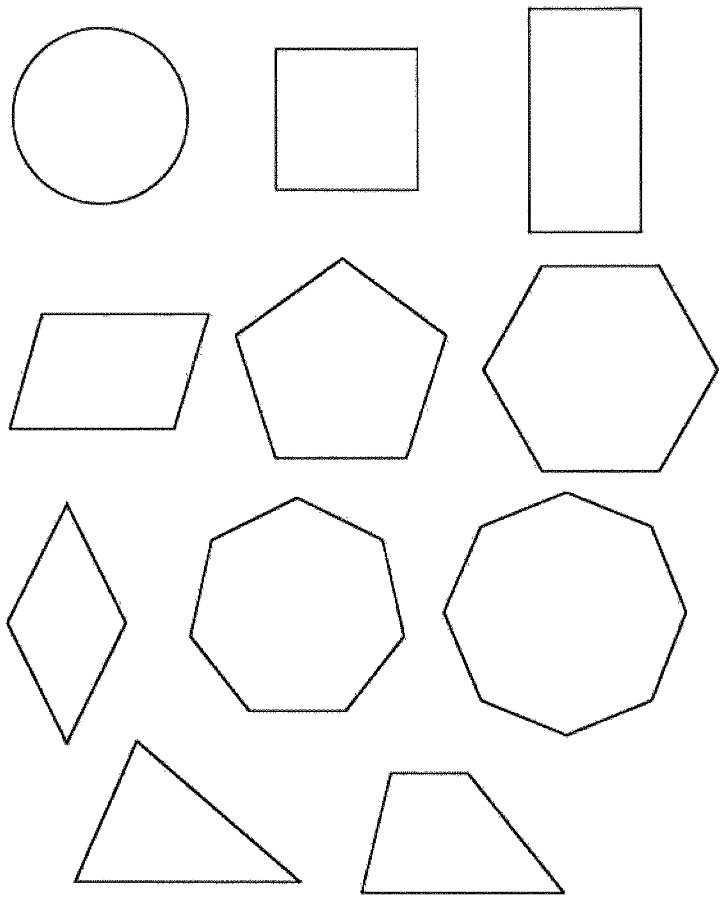

Fig. 1

2. Le disque.

Il est facile de plier un disque en deux. Les deux demi-disques se superposent. Il sont donc équivalents.

Deux figures planes superposables sont équivalentes.
Une seule solution ; quel que soit le diamètre selon lequel on plie, le résultat est le même.

*Ce chapitre est dû à Christine De Block-Docq et Nicolas Rouche.

3. Le carré.

Une première façon naturelle de partager un carré en deux est suggérée à la Fig. 2. Si on procède par pliage, les deux parties se superposent. Il y deux façons de plier un carré comme cela.

Plusieurs solutions.
Ces pliages simples font apparaître, sans qu'il soit besoin de rien définir ;

- les deux médianes du carré ;
- ses deux diagonales ;
- les symétries du carré (et donc les axes de symétrie) ;
- le fait que le carré possède 4 axes de symétrie.

Mieux vaut sans doute, pour enseigner ces notions et propriétés, attendre d'avoir considéré d'autres polygones (un contexte plus large et de nouvelles questions).

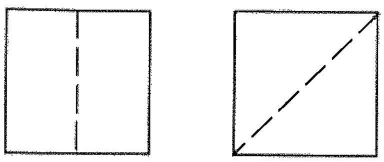

Fig. 2 et 3

Une deuxième façon est suggérée à la Fig. 3. Ici aussi, les deux moitiés se superposent par pliage. Il y a également deux façons de plier le carré comme cela.

Observation : la moitié obtenue d'une manière est équivalente à la moitié obtenue de l'autre, puisqu'elles sont toutes deux moitiés d'un même objet.

Pourrais-je montrer (ou vérifier) directement que les deux moitiés de carré (la rectangulaire et la triangulaire) sont équivalentes ?

Si un carré a été plié des 4 façons indiquées, il est décomposé en 8 morceaux triangulaires équivalents (Fig. 4). La moitié rectangulaire est composée de 4 petits triangles équivalents. La moitié triangulaire aussi. Les deux moitiés sont donc équivalentes, ce qui peut aussi se voir par découpage et déplacement (Fig. 5).

Égalité de deux grandeurs montrée sans aucune mesure, et de plusieurs façons. Si A et B sont deux grandeurs de même espèce (en l'occurrence deux aires), et si $A = B$, alors $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$.

Couper en 2 conduit tout de suite à couper en 4, en 8.

Si A et B sont deux grandeurs de même espèce équivalentes, alors $4A = 4B$ (et plus généralement $nA = nB$, où n est un nombre naturel quelconque).

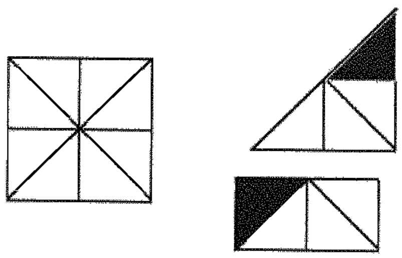

Fig. 4 et 5

Est-ce que je peux encore couper le carré autrement en deux parties équivalentes ?

Mais oui, en utilisant n'importe quel pli passant par le centre du carré (Fig. 6). Mais ici, le pliage ne superpose pas les deux parties. Néanmoins, je suis convaincu que ces parties sont équivalentes.

Une infinité de solutions.
Couper un carré suivant une médiane est la solution que l'on trouve d'abord ; elle correspond à la symétrie la plus apparente du carré. De plus elle est inspirée par un geste quotidien mille fois répété, celui de plier une feuille, par exemple pour l'introduire dans une enveloppe.

Plier suivant une diagonale est déjà plus recherché, quoique inspiré aussi par une symétrie bien visible du carré. Plier selon une droite quelconque passant par le centre relève de la pensée divergente ; c'est penser à côté des habitudes, pour satisfaire une curiosité. Les manoeuvres qui s'imposent à l'esprit sont dites *prégnantes* en psychologie de la forme.

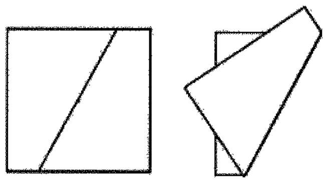

Fig. 6

Et si je veux néanmoins le vérifier directement ?

Ici, on trouve deux réponses.

Je peux imiter la manoeuvre de la Fig. 5 ; chaque moitié est équivalente à une moitié obtenue par pliage le long d'une médiane, comme le montre la Fig. 7.

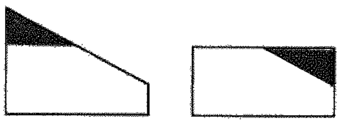

Fig. 7

Mais je peux aussi faire tourner une des deux moitiés autour du centre du carré, et après un demi-tour, elle vient se superposer à l'autre (Fig; 8). Ainsi l'équivalence est prouvée sans découpage.

Apparition du demi-tour ou symétrie centrale.

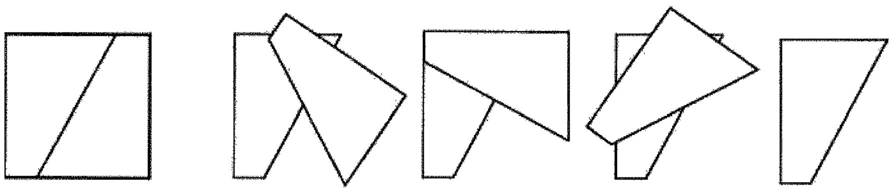

Fig. 8

Si, ayant découpé les deux moitiés, je retourne l'une d'elles (au lieu de la faire tourner en la maintenant sur la table), je m'aperçois que les deux moitiés ne peuvent plus se superposer (Fig. 9).

Chaque demi-carré est une figure orientable.

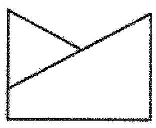

Fig. 9

4. Le rectangle.

Je plie d'abord le rectangle comme sur la Fig. 10(1). Les deux moitiés se superposent. Puis comme sur la Fig. 10(2), et les deux moitiés se superposent aussi. Par contre une moitié de la Fig. 10(1) ne se superpose pas à une moitié de la Fig. 10(2).

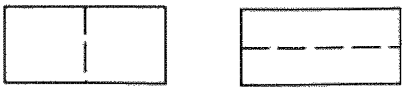

Fig. 10

Ensuite, je plie suivant les diagonales (Fig. 11).

Un rectangle possède 2 axes de symétrie, et un centre ce symétrie.

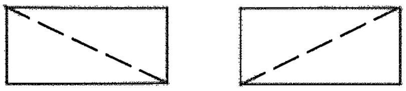

Fig. 11

Le pliage ne superpose pas les deux parties. Par contre on peut les superposer en tournant l'une d'elles d'un demi-tour autour du centre.

Le rectangle peut aussi, comme le carré, être coupé en deux parties équivalentes par n'importe quel pli passant par son centre (Fig. 12).

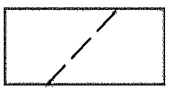

Fig. 12

5. Le parallélogramme.

Je retrouve les mêmes types de plis que pour le carré et le rectangle (Fig. 13).

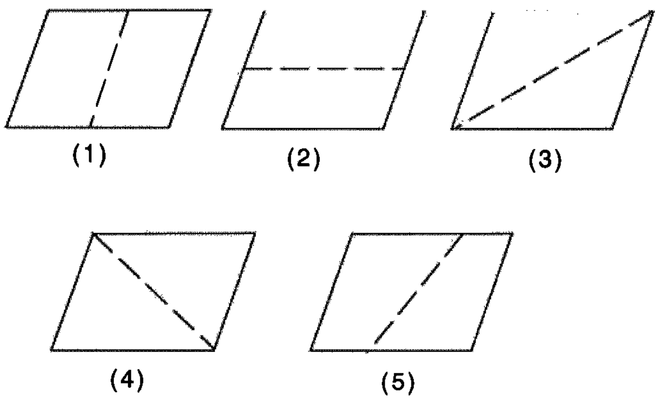

Fig. 13

Mais ici aucun pliage ne superpose les deux parties. Par contre, dans tous les cas, on peut les superposer en tournant l'une d'elles d'un demi-tour. Je remarque aussi que, dans certains cas, je peux superposer les deux moitiés en glissant l'une d'elles vers l'autre sans la faire tourner (Fig. 13 (1) et (2)).

Un parallélogramme ordinaire (c'est-à-dire non rectangulaire) ne possède pas d'axe de symétrie. Par contre, il possède un centre de symétrie.

Apparition de la translation.

6. Le losange.

Je retrouve les mêmes types de plis (Fig. 14).

On n'éprouve pas le besoin à ce stade de prouver, à partir de définitions des différents types de figures, que les deux parties créées par pliage sont superposables (on dit aussi *isométriques*). L'évidence expérimentale suffit.

L'examen du rectangle et du losange n'est pas difficile. C'est un moment calme de la recherche. On nettoie systématiquement le terrain. On s'interroge au passage sur les symétries de ces figures.

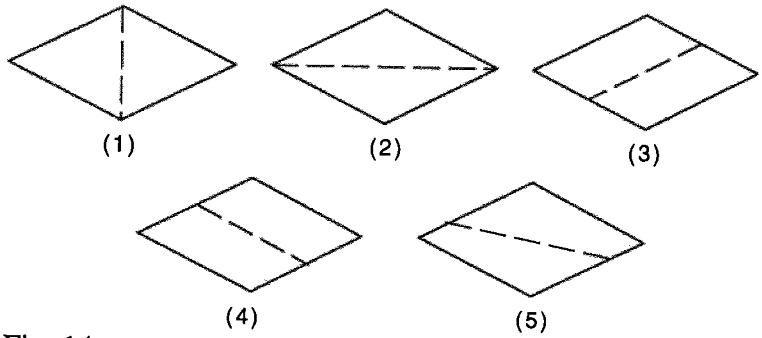

Fig. 14

Mais ici, dans les cas (1) et (2) le pliage superpose les deux parties, dans les cas (3) et (4), on peut utiliser soit le demi-tour, soit la translation, et dans le cas (5) uniquement le demi-tour.

7. Le pentagone régulier.

Un type de pliage s'impose d'abord ; le pli passe par un sommet du pentagone et par le milieu du côté opposé. On n'a pas besoin de déterminer ce milieu pour exécuter le pliage ; c'est le pliage lui-même qui le donne (Fig. 15). Les deux parties se superposent.

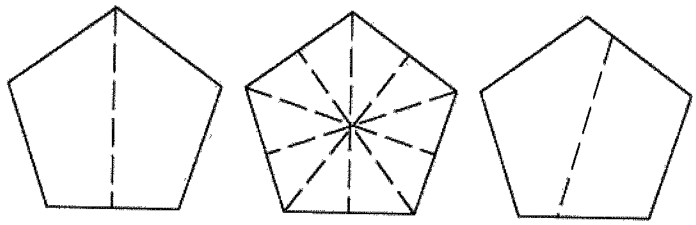

Fig. 15, 16 et 17

Il y a 5 types de plis possibles (Fig. 16).

Le pentagone régulier possède 5 axes de symétrie orthogonale.

Et si on plie le pentagone le long d'une droite quelconque passant par son centre (Fig. 17) ? On obtient deux parties qui ne se ressemblent pas ; l'une a 5 côtés et l'autre 4. Sont-elles équivalentes ? Cela paraît assez difficile à dire. Je suis impressionné par le fait qu'il s'agit d'un polygone *régulier*, et que le pli passe par son *centre*. Il me semble que dans ces conditions, il y a une bonne chance pour que les deux parties soient équivalentes. Mais ce serait un peu long à examiner pour le moment. Je remets à plus tard.

Une question.

Une conjecture. C'est une question en réserve à laquelle on reviendra plus tard, peut-être. On ne peut pas, de toutes façons, faire la clarté sur tout.

8. L'hexagone régulier.

Le premier pli auquel je pense est celui qui passe par deux sommets opposés (Fig. 18). Les deux parties se superposent.

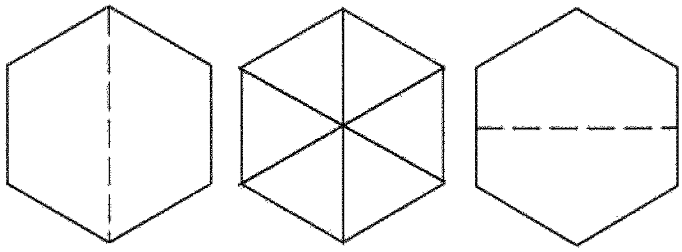

Fig. 18, 19 et 20

De prime abord, je me disais que puisqu'il s'agit d'un hexagone, il y aurait 6 plis de ce genre (il y avait bien 5 plis d'une même sorte pour un pentagone régulier). Mais surprise... il n'y en a que 3 (Fig. 19). Et tous comptes faits, c'est assez naturel ; il y a 6 sommets, mais il n'y a pas un pli par sommet, puisque chaque pli passe par deux sommets (ce qui n'était pas le cas pour le pentagone).

Mais je peux aussi plier l'hexagone autrement ; en faisant passer le pli par les milieux de deux côtés opposés (Fig. 20). Les deux parties se superposent ici aussi. Et il y a 3 plis de ce genre (Fig. 21).

Surprise ;
le pentagone ; 5 côtés, 5 sommets, 5 plis d'une même sorte ; un pattern, un rythme s'amorce ici ;
l'hexagone ; 6 côtés, 6 sommets, ... et seulement 3 plis ; le pattern est brisé, c'est le moment d'ouvrir l'oeil.
Souvent, en suivant la pente naturelle de la pensée, on s'imagine que les choses sont simples, alors qu'en fait elles ne sont pas comme on les attendait.

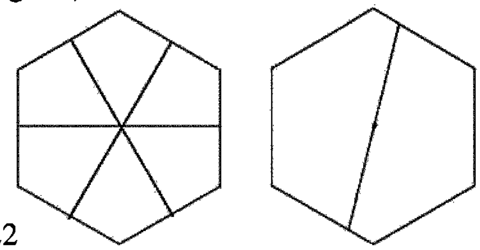

Fig. 21 et 22

Ainsi, l'hexagone régulier a 3 plis d'un certain type et 3 plis d'un autre type. Donc quand même au total 6 plis. Mais la réalité est plus compliquée que je ne m'y attendais.

Par ailleurs, couper l'hexagone par un pli quelconque passant par son centre donne visiblement deux parties équivalentes ; une rotation d'un demi-tour amène l'une d'elles sur l'autre (Fig. 22).

Quelques surprises de ce genre contribuent à augmenter la prudence intellectuelle du chercheur.
C'est le rapprochement du pentagone et de l'hexagone qui amène cette observation intrigante. Une étude monographique de ces deus figures n'aurait pas amené facilement la surprise.

Pourquoi diable le pentagone est-il sur ce point tellement plus compliqué ? Mais 5 est un nombre impair, et tous comptes faits, je n'aime pas beaucoup ces nombres. J'ai l'impression que les nombres pairs se mettent mieux.

Nouvelle surprise.
Un sentiment ; même les nombres peuvent avoir un côté affectif.

9. L'heptagone régulier.

J'en arrive à l'heptagone régulier et m'aperçois presque tout de suite qu'il se comporte comme le pentagone régulier ; on le divise en deux parts égales par des plis dont chacun passe par un sommet et par le milieu du côté opposé. Le pliage superpose les deux parties. On trouve 7 plis avec cette propriété (Fig. 23).

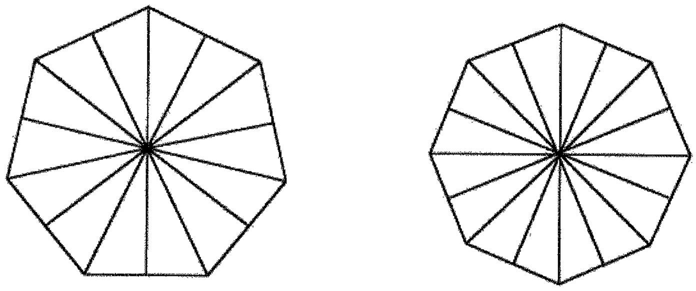

Fig. 23 et 24

Alors une idée me vient ; après tout seuls les polygones réguliers avec un nombre impair de côtés ont un côté opposé à chaque sommet. Et seuls les polygones avec un nombre pair de côtés ont des sommets opposés par paires et des côtés opposés par paires. Donc les premiers se comporteront comme le pentagone et l'heptagone, et les seconds comme l'hexagone.

J'anticipe donc le résultat cherché pour l'octogone régulier. Le voici.

Observation d'une régularité. Conjecture qui généralise les propriétés observées. La conjecture porte sur une infinité de figures (tous les polygones réguliers). On ne dessinera ni même ne verra jamais la majorité d'entre elles ; quelque chose se passe là uniquement dans l'esprit (à la fois l'imagination et la raison).

Avoir repéré une régularité permet des prévisions.

10. L'octogone régulier.

Je trouve 4 plis joignant des sommets opposés, et 4 plis joignant des milieux de côtés opposés (Fig. 24).

11. En remontant.

Mais alors je peux revenir aux premiers polygones et les voir sous un jour nouveau.

De fait le carré est divisé en deux parties égales par 2 plis joignant des sommets opposés, et par 2 plis joignant des milieux de côtés opposés.

Quant au triangle équilatéral, que je n'avais pas encore regardé, il se confirme qu'il a bien 3 plis passant chacun par un sommet et par le milieu du côté opposé (Fig. 25).

La confiance dans la conjecture augmente au fur et à mesure que l'on découvre des cas particuliers.

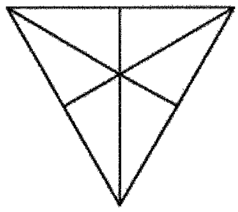

Fig. 25

Il est assez agréable de voir ainsi s'installer un ordre dans l'ensemble infini des polygones réguliers. J'en éprouve un sentiment d'harmonie, et le contentement d'avoir, par ma réflexion, aperçu cela.

Découverte d'une structure.
La joie de connaître.

Un preuve de la conjecture n'est pas apparue comme nécessaire.

12. Un triangle quelconque.

J'en arrive au triangle proposé à la Fig. 1. A première vue je n'en attends pas grand chose de bon, car il n'a rien de régulier.

J'essaie un pli passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Déjà ici, ça ne va pas tout seul, puisque je dois d'abord trouver le milieu (ce que je fais par un autre pliage Fig. 26).

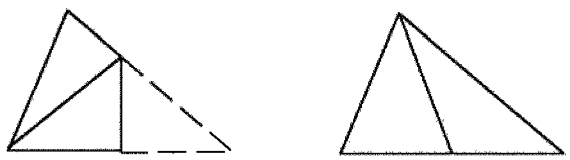

Fig. 26 et 27

Ensuite j'obtiens ce que montre la Fig. 27. Le pliage ne superpose pas les deux parties (Fig. 28(1). Un demi-tour d'une des parties autour du milieu du pli ne donne rien non plus.

Une tentative infructueuse.

Les procédés antérieurs échouent. Nouveau défi. Doute.

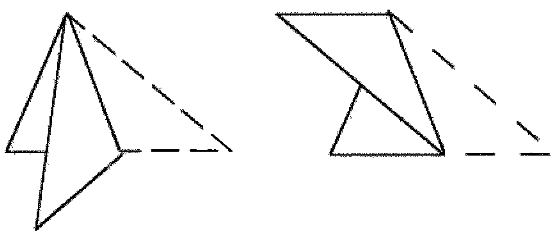

Fig.28

Alors la question reste entière ; les deux parties sont-elles équivalentes ?

Bien sûr je me souviens de la formule de l'aire du triangle ; cette aire égale "la moitié de la base par la hauteur". Et c'est vrai qu'ici les deux triangles ont des bases équivalentes et la même hauteur (Fig. 29).

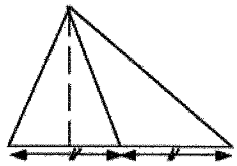

Fig. 29

Donc les deux parties triangulaires ont la même aire. Ce raisonnement donne le résultat, mais il m'énerve parce qu'il est beaucoup trop savant. Je ne sais même plus d'où vient la formule de l'aire du triangle !

Preuve convaincante, mais pas éclairante.

Je voudrais montrer l'équivalence des deux triangles par des manoeuvres élémentaires ; déplacements, pliages, coïncidences de figures. Je veux rester dans l'ambiance de recherche où je travaille depuis le début.

Recherche d'élégance ; une question de goût.

Alors je me souviens de ce que le prof nous a dit ; quand vous ne voyez pas clair dans une figure, ne restez pas là à la regarder en rêvassant ; faites quelque chose, essayez d'ajouter à la figure une construction éclairante.

Enrichir le contexte peut faire apparaître des relations nouvelles. C'est un point de méthode important.

J'ai essayé d'ajouter plusieurs choses, et pendant longtemps ça n'allait pas. Je ne vais pas vous ennuyer en vous montrant tout les trucs qui n'ont pas marché. Et d'ailleurs j'avais comme l'esprit brouillé et je ne pourrais presque plus vous dire pourquoi j'ai essayé ceci ou cela. A la fin j'étais même découragé, et j'ai failli envoyer tout promener.

Il y a des moments d'obscurité et d'impuissance ; toute recherche a ses périodes de sécheresse.

Puis je me suis dit, et c'était au début une idée très vague, que le triangle était un parent du parallélogramme. Et j'ai fini par dessiner la Fig. 30.

Etre attentif à des mouvements ténus de la pensée. Quand on sent venir quelque chose, il faut redoubler d'attention.

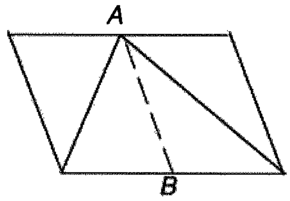

Fig. 30

Ainsi le triangle donné est dans un parallélogramme dont deux côtés sont équivalents et parallèles au pli AB. Le pli AB divise le grand parallélogramme en deux parallélogrammes équivalents (et même superposables). Donc les deux petits triangles que je veux comparer sont chacun une moitié de deux formes équivalentes. Et donc ils sont équivalents.

Si A et B sont deux grandeurs équivalentes, alors $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$ (cette propriété a déjà été appliquée au n^o 2).
Le détail de la démonstration n'a pas paru nécessaire.

J'ai trouvé ça pas mal du tout, d'autant que... ce n'était pas donné. Ouf !

Contentement à la mesure de l'effort.

13. Un trapèze.

Le trapèze m'est apparu assez rapidement comme un triangle étêté. Je le complète pour voir le triangle (Fig. 31).

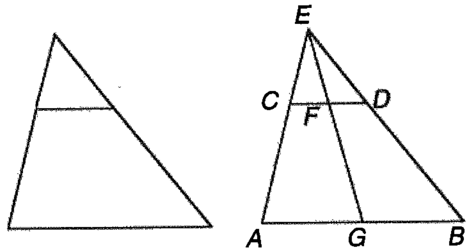

Fig. 31 et 32

Je joins le sommet du dessus au milieu de la base (Fig. 32). Et il se fait que cette droite coupe la petite base du trapèze en son milieu F. Ainsi le triangle AGE est équivalent à GBE. De même ECF est équivalent à EFD. Donc par différence, $ACFG$ est équivalent à $GFDB$. Ainsi le trapèze est coupé en deux parties équivalentes.

Il n'est pas tout à fait évident que la droite EG passant par le milieu G de AB passe aussi par le milieu F de CD. Dans un cours de géométrie présenté axiomatiquement, cette propriété devrait être déduite des axiomes. Dans le travail ci-contre, elle est acceptée telle quelle, ce qui est sans dommage pour la suite.
Si un enseignant voit un jour ses élèves accepter sans broncher une propriété fausse, ce qu'il a de mieux à faire est sans doute d'étendre la recherche à un contexte qui amène à débusquer l'erreur. Une telle situation est généralement stimulante, car on apprend souvent beaucoup en redressant une contradiction.

Si A et B sont deux grandeurs égales , et C et D deux grandeurs égales aussi, et si $C < A$ (et donc $D < B$), alors

$$A - C = B - D.$$

14. Remarques en guise de conclusion.

L'idée de couper des formes en deux parts "égales" conduit à une activité mathématiques vraie, bien qu'élémentaire. Elle suscite explorations, conjectures, exemples, contre-exemples, surprises, argumentation, etc.

Il est intéressant de voir des notions de symétrie sortir d'une activité qui ne les visait pas.

Nous avons énoncé en marge l'une ou l'autre propriété abstraite des grandeurs. Il va de soi qu'elles ne doivent pas être enseignées telles quelles ; on les rencontre et les assimile dans le quotidien.

Par contre, certains éléments de géométrie pourraient, à la suite d'une période d'activité de ce type en classe, être retenus dans une synthèse. Ceci sort du cadre du présent exposé.