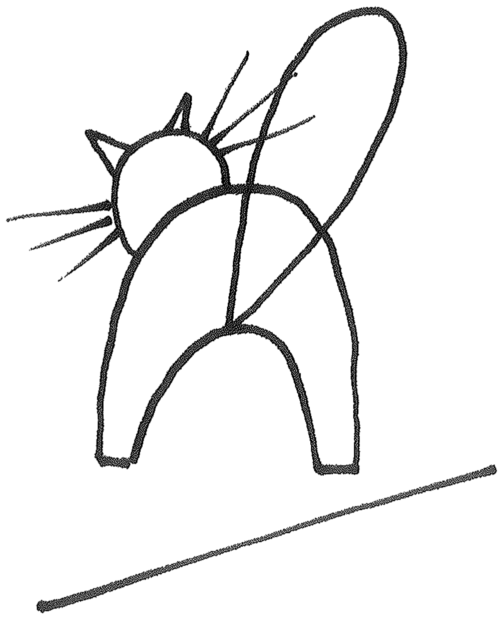
Propositions
5

Fouetter un chat avec une droite



Groupe d'Enseignement Mathématique
Louvain-la-Neuve

Sous le titre général

PROPOSITIONS

le GEM diffuse des textes divers à l'intention des professeurs de mathématiques des écoles secondaires. Ces textes sont des documents de travail préparés pour être discutés, améliorés, complétés. Les lecteurs sont cordialement invités à envoyer leurs critiques et commentaires au GEM, chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve.

Ce n° 5 des Propositions résulte de la collaboration d'Anne Dejardin, Suzanne D'Addato, Brigitte Joris, Norbert Piront, Myriam Renard, Nicolas Rouche, Luc Terryn, Rosane Tossut et Anne Warnier.

Thierry Lucas a relu et critiqué une première version de ce texte.

Décembre 1981 Prix : 75 FB.

Table des matières

	Une droite c'est quoi ?	1
I.	L'idée de droite à douze ans	3
II.	Il y a droite et droite	9
III.	Au commencement, il y aura les segments	14
	1. Une autre voie	14
	2. Segments	14
	3. Droites	17
	4. Commentaires	18
IV.	Qu'en pensent les élèves ?	20
	Bibliographie	24

Introduction

Une droite c'est quoi ?

On peut croire que la droite est un objet simple et qu'avec une droite il n'y a pas de quoi fouetter un chat. L'expérience prouve qu'il n'en est rien et que ce concept ne va pas de soi. C'est pourquoi nous allons fouetter un chat avec une droite.

Notre dossier comprend quatre parties :

tout d'abord le compte-rendu de conversations sur la droite tenues dans une classe d'élèves de 12 ans à l'occasion d'un travail de classement de polyèdres. On le verra à ce qu'ils ont dit : les élèves du secondaire qui commencent la géométrie ne sont pas des têtes vides dans lesquelles il n'y aurait qu'à verser des définitions correctes.

- ensuite une réflexion sur les divers niveaux épistémologiques de l'idée de droite.
- la troisième partie est une présentation axiomatique de la géométrie d'incidence à partir des segments plutôt que des droites.
- et pour terminer deux fiches dont l'objectif est de relever dans des classes le degré de maturité des concepts de droite, segment et parallèles.

Cette brochure est destinée aux professeurs ou aux élèves-professeurs qui ont le goût d'approfondir les matières de leur enseignement. On espère qu'ils éprouveront quelque plaisir à découvrir tant d'aspects divers sous la banalité d'un concept aussi élémentaire que celui de droite. Et peut-être cette lecture les encouragera-t-elle à porter un regard critique et stimulant sur d'autres concepts.

Nous voudrions en terminant les conjurer de ne pas enseigner dans leurs classes la Section III de notre étude : la mise en ordre axiomatique n'est pas le commencement mais le terme de l'activité mathématisante.

I. L'idée de droite à douze ans

Nous avons donné aux élèves répartis en équipes des polygones réguliers en carton : triangles, carrés, pentagones, hexagones et octogones, tous de même côté. Ils devaient avec cela construire des volumes les plus différents, les plus beaux, les plus originaux possible. Inutile de dire qu'ils s'en sont donné à coeur joie. Il a fallu pas mal de temps pour voir apparaître, parmi une multitude de volumes, les cinq polyèdres réguliers.

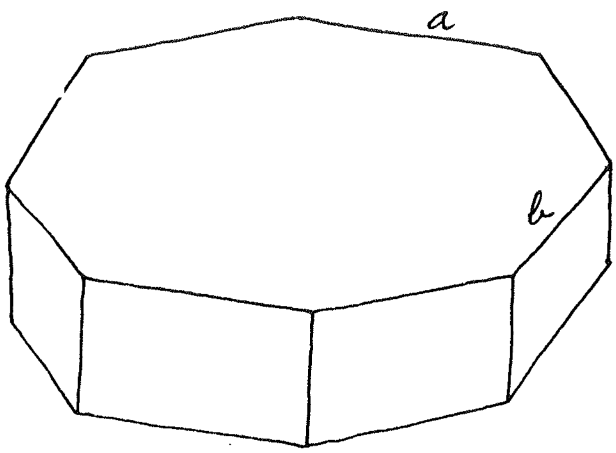
Nous leur avons demandé ensuite de classer ces polyèdres (ou pas tout-à-fait polyèdres). Ils devaient se donner des critères de classement et suivant chacun d'eux trier les volumes construits. Ils avaient aussi pour consigne d'observer les positions relatives des arêtes, des sommets et des faces[1].

Ici se situe notre premier étonnement. Ne va-t-on pas arriver à la conclusion suivante : il y a des arêtes parallèles, des arêtes qui se coupent, des arêtes qui se couperaient si on les prolongeait et des arêtes qui ne se coupent pas même si on les prolonge ? Voici un exemple : à la question

- et ces deux arêtes (a et b) se coupent-elles ?

---

[1] Nous aurions pu poser seulement le problème du classement des polyèdres et attendre que naisse de soi-même, à cette occasion ou à une autre, un besoin de clarté supplémentaire sur les segments et les droites. Nous ne l'avons pas fait parce que nous voulions connaître sans tarder les conceptions spontanées ou les souvenirs scolaires des élèves sur ces deux types d'objets.



<u>plusieurs</u> équipes nous ont répondu :

- elles se coupent suivant une arête.

Nous voilà bien loin de l'idée de droite illimitée dans les deux sens ! Ne voulant rien forcer, nous nous sommes contentés de ces réponses et avons attendu la suite.

Plus tard il y a eu une discussion à propos de courbes, de droites et de points. Elle est survenue alors que nous essayions ensemble de donner une définition de <u>polygone</u>. Nous étions d'accord pour dire qu'un polygone doit avoir des côtés droits. Mais qu'est-ce qu'un côté courbe ?

- Dans un côté courbe, il y a autant de côtés qu'on veut.
- Alors chaque côté est un point, pas un côté !
- Mais les côtés droits ont aussi une infinité de points.
- Mais sur la courbe, ils ne sont pas sur une droite.

Sorte de cercle vicieux. Comment s'en tirer ? Plus tard une élève dit :

- Plus on dessine de côtés dans un cercle, plus il se rapproche (traduisez : le polygone) du cercle.
- On ne va pas voir que c'est un polygone, mais on pourra le dire.

On en arrive alors à dire qu'un cercle serait un polygone à une infinité de côtés, mais alors ses côtés seraient des points. Le cercle n'est donc plus un polygone.

Un peu plus tard un élève dit, spontanément,

Un point, on ne peut pas le dessiner. A nouveau c'est une convention [N.B. On avait déjà parlé de convention en mathématique]. Un point n'existe pas. Si on le dessine, ce n'est plus un point !

Réaction violente dans la classe : brouhaha, chahut, mécontentement ...

- Comment peux-tu imaginer qu'on ait donné un nom à quelque chose qui n'existe pas ?!

Nous retrouvons les élèves plus tard autour d'une table remplie de leurs volumes. Nous voulons arriver à une définition de polyèdre. Prenons la discussion au moment où on s'est mis d'accord sur ce point : les faces d'un polyèdre doivent être planes. Mais comment voir qu'une face est plane ? Un élève prend alors un volume dont une face est courbe. Il pose son doigt sur cette face :

- Si la face est plane, le doigt doit toucher la face partout.
- Qu'est-ce que c'est ton doigt ?
- Une ligne droite.
- Qu'est-ce que c'est une ligne droite ?
- Une ligne qui va droit.
- Un segment de petits points.
- Une infinité de petits points les uns à côté des autres.

Une élève prend alors une feuille de papier et la plie en deux en son milieu dans le sens de la longueur. Elle montre le pli :

- On sait qu'elle est droite puisqu'il y a la même chose des deux côtés. Les deux côtés de la feuille sont aussi des droites.

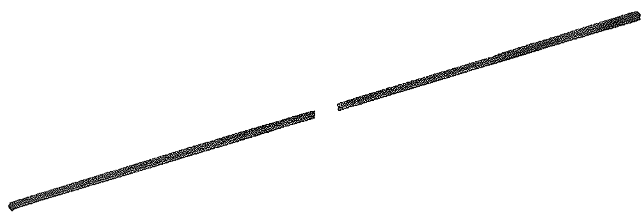
Un autre élève prend à son tour la feuille. Il la plie, non plus en son milieu, mais toujours parallèlement aux grands côtés. C'est toujours une droite. Il va même plus loin : on peut plier la feuille n'importe comment, on a toujours une droite.

La conversation se poursuit.

- Une droite, c'est une ligne qui ne tourne pas, qui continue toujours dans la même direction, qui ne dévie pas.

Attention ! Le toujours ne veut pas dire qu'elle est infinie. On n'y est pas encore ! Il veut dire : sur tout son trajet.

- Une ligne droite ne peut pas être brisée.
- Si on s'arrête à un moment, elle sera brisée. Si on recommence un peu plus loin, on a une droite brisée. On a deux droites, comme ça

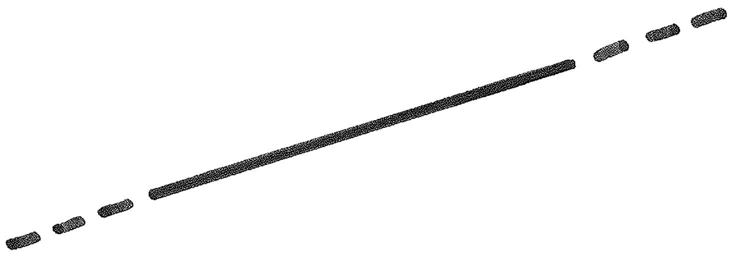


- Si on la fait en deux fois mais qu'on la fait juste, on a une droite.
- Si on s'arrête, on a une droite limitée par deux points.
- On pourrait continuer toute sa vie dans la même direction. Et puis après nos enfants ...
- Mais on reviendrait au point de départ, car la terre est ronde.
- Elle est de toute façon limitée au point de départ.
- On ne pourra pas distinguer ce point des autres points.

Question : avions-nous déjà pensé qu'au moins pour certains enfants de 12 ans, une droite semble devoir commencer quelque part, qu'il faut qu'elle ait un début même si elle est illimitée.

Intervention de notre part : on peut quitter la terre. Pensez aux astronautes ! Est-ce que cette droite que l'on trace autour de la terre est bien une droite ?

Pour nous elle sera droite ... Mais si on voit toute la terre en même temps, elle est courbe.
- Si je dessine une ligne droite sur un plancher, elle est courbe alors ? Qu'est-ce que c'est une vraie droite ?
- De l'extérieur, c'est celle-là (traduisez : celle qui quitte la terre, qui n'en fait pas le tour) qui est la meilleure.
- La droite commence d'un côté. Elle est toujours limitée d'un côté.
- On peut prolonger des deux côtés ... On commence toujours d'un point. Même quand on l'a tout-à-fait dessinée, on sait toujours où est le point.
- Si on n'a pas de repère, on ne peut pas le savoir.
- Si on nous dit qu'il faut tracer une droite qui va jusqu'à l'infini, on doit mettre des petits points des deux côtés, comme ceci :



- On mettrait des petits points du côté vers lequel on trace.
- Si elle s'arrête quelque part, on dira que c'est une droite limitée.
- Quand on dit droite, on devrait continuer jusqu'à l'infini. Autrement, il faut préciser.

Et voilà ! la discussion est terminée ... momentanément. Nous en avons limité la transcription essentiellement à ce que les élèves ont dit. Nos deux coups de pouce ont été la question de départ et l'idée de pouvoir quitter la terre. Les tournants principaux de la discussion ont en tous cas été pris par les élèves eux-mêmes.

Résumons, pour terminer, les étapes parcourues :

a) une idée non orthodoxe de l'intersection de deux segments (deux arêtes se coupent suivant une arête);
b) un essai d'analyse de l'opposition entre droite et courbe (la courbe est un polygone qui possède une infinité de côtés, ces côtés sont des

points. Cet essai tourne court (sur un segment, il y a aussi une infinité de points);

c) le point dessiné et le point des mathématiques : ce dernier existe-t-il ? La naissance d'une telle question ontologique indique-t-elle qu'il faut expliquer très tôt dans les classes ce qu'est le formalisme ?

d) un plan contient toutes les lignes droites passant par deux de ses points;

e) un papier se plie suivant une droite (l'idée se détache progressivement de son contexte : le pli est droit indépendamment de la forme de la feuille et de ses bords);

f) une acception non orthodoxe de l'adjectif brisé : deux segments alignés disjoints forment une droite brisée;

g) découverte de l'"infinitude" d'un côté (demi-droite), puis des deux, et proposition d'un graphisme pour l'exprimer. Le segment est distingué de la droite.

h) on rejette progressivement l'idée que la droite possède un point privilégié, celui à partir duquel on l'a tracée.

i) la droite fait le tour de la terre : régression momentanée de la distinction droite-courbe et de l'idée d'infinitude de la droite.

II. Il y a droite et droite

La ligne droite se rencontre dans la vie et le langage de tous les jours. On la dessine, on la trouve à l'angle de deux murs, on la parcourt en marchant. Comparée à la droite dont parlent les mathématiciens, elle n'est pas un concept vague, imparfait, inférieur. En effet, elle rend service, elle fonctionne dans la vie et les métiers. On la trace au cordeau dans les jardins, au fil à plomb ou au niveau d'eau sur les chantiers, à la règle dans les écoles et les bureaux de dessin, etc. Qu'on nous pardonne d'insister, mais c'est essentiel pour notre propos : cette droite, que nous appellerons droite quotidienne, est un concept plein de sens, clair, bien adapté à son usage.

Dans les exposés axiomatiques de la géométrie, la droite est considérée comme un terme primitif et n'est pas définie autrement que par les axiomes auxquels elle satisfait, habituellement au départ les axiomes d'incidence et de parallélisme. Cette droite des mathématiciens est, elle aussi, un concept clair dans les contextes où on l'utilise. Elle fonctionne bien dans les théorèmes. Nous l'appellerons ci-après la droite axiomatique.

Les statuts épistémologiques respectifs de la droite quotidienne et de la droite axiomatique sont très différents. Il suffit, pour s'en rendre compte, de réaliser d'une part que la droite axiomatique admet de multiples modèles mathématiques[2] et physiques, et d'autre part au fait que la droite quotidienne n'est après tout qu'un assez piètre modè-

---

[2] Penser en particulier aux géométries finies, où chaque droite ne comprend qu'un nombre fini de points.

le de la droite axiomatique. Il y a donc loin de la droite quotidienne, et de sa variété commune qu'est la droite de l'écolier, à la droite axiomatique. Entre les deux, il y a un seuil épistémologique[3] important.

Apprendre la géométrie, c'est entre autres apprendre à franchir des seuils épistémologiques dont celui-là est un des premiers. Voici comment procèdent plusieurs exposés élémentaires de géométrie plane que nous connaissons. Une certaine forme de droite qualifiée de mathématique est expliquée avant tout problème, par idéalisation de l'un ou l'autre modèle physique. On l'appelle communément aussi droite idéale. "Tu sais ce que c'est qu'un fil tendu ? Et bien ce n'est pas de cela que nous allons parler en mathématique, mais d'un objet idéal dont le fil tendu ne donne qu'une représentation imparfaite[4], etc., etc." L'élève est supposé s'apercevoir plus tard que la droite idéale, ainsi introduite a priori, fonctionne bien dans la construction théorique, et qu'on[5] a donc eu bien raison de la choisir comme ça.

Les façons dont on parle de cette droite renvoient au vieux débat philosophique sur l'infini actuel et l'infini potentiel. A. Lalande [1] définit comme suit l'adjectif infini : "Qui n'a pas de borne, soit en ce sens qu'il est actuellement plus grand que toute quantité donnée de même nature (infini actuel), soit en ce sens qu'il peut devenir tel (infini potentiel)". On dit que la droite est infinie, ou illimitée, ou illimitée dans les deux sens; on dit aussi qu'elle est infiniment finie, et toutes ces expressions évoquent l'infini actuel. On dit qu'on peut toujours la prolonger (ce qui veut dire qu'on la considère au départ comme un segment), qu'on n'aura jamais fini de la dessiner, qu'on peut la dessiner de plus en plus fine, que tout ce qu'on peut dessiner ne fera jamais que l'approcher, et tout cela c'est plutôt l'infini potentiel.

---

[3] L'idée de seuil épistémologique est suffisamment claire dans le présent contexte. On trouvera dans [3] une discussion détaillée de cette notion en relation avec l'apprentissage des mathématiques.
[4] "objet idéal", "représentation imparfaite", type de vocabulaire dévalorisant la réalité quotidienne face à sa contrepartie scientifique. Il y a le dessus et le dessous du seuil épistémologique.
[5] Qui ça on ? Et bien, les grands mathématiciens, ceux des notes de bas de page.

Il est clair que cette droite des exposés élémentaires n'est pas la droite axiomatique. Nous l'appellerons dorénavant la droite philosophique. Le rôle qu'on lui prête est celui de marchepied pour franchir le seuil épistémologique entre la droite quotidienne et la droite axiomatique. Bien que personne, de toute façon, ne puisse les imaginer complètement, les droites philosophiques sont supposées satisfaire "assez clairement" aux axiomes d'incidence et de parallélisme. On imagine qu'elles fonctionneraient comme cela dans l'espace physique. Mais d'autre part, elles ne sont pas des objets physiques dans la mesure où on ne peut même pas les imaginer complètement et où on ne peut expérimentalement rien vérifier qui les concerne.

Ce sont des objets d'identité douteuse. Le fait, notons-le au passage, qu'on les ait inventées comme des sortes de marchepieds aidant à franchir le seuil prouve à suffisance l'existence et la hauteur de ce seuil. Mais ce ne sont donc ni des droites de physicien, ni des droites de mathématicien. Ce sont des hermaphrodites, des apatrides, sans passeport épistémologique. Ou peut-être possèdent-elles la double nationalité et changent-elles de veste selon les services qu'elles rendent dans des discours pédagogiques jugés irremplaçables, quoique douteux.

Que faire si, comme cela semble bien être le cas, la droite philosophique n'est pas complètement intelligible[6] ? Peut-on ne pas en parler ? Où est la solution ? Nous tentons ci-après une réponse en deux points.

1) Rappelons tout d'abord l'existence des deux niveaux qui ne font pas problème, d'une part le niveau quotidien, et d'autre part celui de la géométrie formalisée. Les concepts en jeu n'y sont pas de même nature, mais ils fonctionnent des deux côtés à la satisfaction des usagers.
Il faut certes un discours qui fasse le lien, un commentaire de la géométrie formalisée qui explique sa relation à la géométrie quotidienne. Mais pourquoi situer ce discours à un troisième niveau, supposé intermédiaire entre les deux autres ? Voici donc notre première proposition :

---

[6] Les enfants sont très sensibles à ce défaut. Dans un cas analogue (cf. n° 1), nous avons vu la classe devenir houleuse à propos de ce point mathématique qui existe tout en n'existant pas.

à côté du langage de la géométrie formalisée, le langage interprétatif qui en explique la relation au réel quotidien doit être[7] un langage quotidien, et même pour la clarté, s'afficher comme tel. Le pire, c'est quand on ne sait pas si on est dans ou hors de la science, au-dessus ou en dessous du seuil épistémologique : la raison s'affole entre les deux.

2) Si on décide d'enseigner la géométrie en partant de l'élève et en commençant dans son langage (pour qu'il comprenne), on partira avec des segments physiques. On essayera de construire une théorie géométrique. Ce travail de construction théorique posera des problèmes, à la fois de démonstration et de conceptualisation. Pour les résoudre, on affinera petit à petit les concepts. On les multipliera aussi (par exemple on distinguera segment et droite). Les versions mathématiques du concept de droite naîtront dans ce processus au moment même où on aura besoin d'elles, c'est-à-dire dans des problèmes.

Voici un essai d'explication dans le langage interprétatif[8] : "Je sais ce que c'est qu'un point dessiné, et aussi un trait de crayon et un cercle au compas. Je veux faire passer un cercle par trois points a, b, c non alignés. Je trouve le centre d'un tel cercle sur l'intersection des médiatrices de ab et bc. Plus mon dessin sera précis, mieux sera défini le cercle que je cherche. Je serais très embarrassé si, en faisant la théorie de cette situation, je devais continuer à supposer que, selon la précision du travail, il y a plus ou moins de cercles répondant à la question. Je voudrais donc, pour des raisons de construction théorique, qu'il n'y en ait qu'un. Pour cela je supposerai, dans la théorie, qu'il n'y a qu'un seul segment [ab] et un seul [bc], que chacun d'eux n'a qu'une médiatrice, que ces médiatrices se coupent en un seul point, que les segments [oa], [ob] et [oc] sont univoquement déterminés et sont isométriques. En pratique, je ne devrai pas supposer toutes ces choses séparément, mais je choisirai des axiomes dont elles se déduisent.

[7] On peut d'ailleurs défendre avec quelque vraisemblance l'idée que ce langage interprétatif ne peut qu'appartenir au langage quotidien, par le simple fait que les concepts quotidiens y figureront tels qu'ils sont, c'est-à-dire non dénaturés par une amorce de théorisation, quelle qu'elle soit. La droite philosophique est un concept quotidien modifié, dénaturé par un essai avorté de théorisation.

[8] Il s'agit d'un exercice périlleux, mais le lecteur est invité à tirer sur le pianiste.

Ensuite, je serais également très embarrassé s'il devait se faire que l'existence d'un et un seul cercle passant par trois points non alignés ne soit pas vraie dans des cas de figures très difficiles, comme par exemple si les points a, b et c sont presque alignés. Pour faire une théorie propre, je ne veux pas d'exception. Donc si les médiatrices ne se rencontrent que très très loin et en un point d'autant moins précisément défini qu'elles sont presque parallèles, je continuerai à supposer qu'elles se rencontrent en un seul point. Ce point sera très loin de ma feuille de papier. Il sera dans le prolongement des segments que je peux dessiner. Je supposerai donc que tout segment est prolongeable. Alors toutes les figures obéiront à la théorie. Dans la théorie, j'ai besoin d'ordre. Je ne pourrais pas accepter d'exceptions de cette sorte. Un théorème doit être un théorème".

Voilà un type de langage qu'on pourrait tenir pour motiver les propriétés mathématiques données à la droite. Le lecteur jugera de sa pertinence. Quoiqu'il en soit, nous voudrions terminer par une question. On arrive de nos jours à enseigner les débuts de l'analyse mathématique sans discours douteux sur les infinitésimaux. Pourquoi, après tout, n'arriverait-on pas à enseigner les débuts de la géométrie sans discours douteux sur l'infinitude de la droite ?

III. Au commencement, il y aura les segments

1. Une autre voie.

Avant d'attaquer le problème de la droite avec de tout autres moyens, résumons la Section II : il existe un seuil épistémologique (important) entre la droite quotidienne et la droite axiomatisée. La droite idéalisée est un marchepied branlant pour franchir ce seuil. Plutôt que de l'invoquer, il vaut mieux expliquer la correspondance de la géométrie formalisée à la géométrie quotidienne dans un langage interprétatif délibérément quotidien.

Mais on peut aussi prendre la difficulté par un tout autre bout. Après tout si, dans l'étude de la géométrie, on n'évite pas ce seuil épistémologique important, c'est parce que la géométrie commence avec des droites, alors que dans la vie on n'a que des traits de crayon et des fils tendus. Or le bon sens indique que le trait de crayon (quotidien, et pour cause) est plus proche du segment (mathématique) que de la droite axiomatisée. D'où la question : n'arriverait-on pas à réduire la hauteur du seuil épistémologique en commençant la géométrie avec des segments axiomatiques, plutôt qu'avec des droites axiomatiques ? Reformulée plus précisément, cette question conduit au problème suivant, qui serait bien adapté à une classe d'élèves-professeurs :

Problème : construire une axiomatique de la géométrie d'incidence en remplaçant, parmi les termes primitifs, les droites par des segments.

2. Segments.

2.1 Nous nous intéressons à un ensemble Π appelé le plan. Les éléments du plan sont appelés points. Certaines parties de Π non réduites à un point sont appelées <u>segments</u>.

On appelle <u>prolongement</u> d'un segment S tout segment qui inclut S.

Nous dirons qu'un segment S_1 <u>est aligné sur</u> un segment S_2 s'il existe un segment dont les intersections avec S_1 et S_2 contiennent chacune plus d'un point. Nous dirons aussi que S_1 et S_2 sont <u>alignés l'un sur l'autre</u>, et exprimerons ce fait en écrivant $S_1 \text{ A } S_2$.

C'est pour pouvoir définir les droites à partir des segments que nous introduisons la relation "être aligné sur" sur l'ensemble des segments. L'axiome suivant nous permettra de démontrer que cette relation est une équivalence.

2.2 <u>Axiome</u> A_1. L'union de deux segments dont l'intersection contient plus d'un point est un segment.

2.3 Corollaire. Deux segments dont l'intersection contient plus d'un point sont alignés l'un sur l'autre.

2.4 Théorème. La relation "être aligné sur" est une équivalence sur l'ensemble des segments.

<u>Démonstration</u>. La relation est réflexive car les segments contiennent par définition plus d'un point. Elle est évidemment symétrique. Montrons qu'elle est également transitive. Soient S_1, S_2 et S_3 trois segments tels que $S_1 \text{ A } S_2$ et $S_2 \text{ A } S_3$. Il existe donc un segment S tel que $S \cap S_1$ et $S \cap S_2$ contiennent plus d'un point et un segment S' tel que $S' \cap S_2$ et $S' \cap S_3$ contiennent plus d'un point. Considérons $S \cup S_2 \cup S'$. Il s'agit d'un segment car, par suite de l'Axiome A_1, $S \cup S_2$ et $S_2 \cup S'$ sont des segments. De plus, $S \cup S_2 \cup S'$ a plus d'un point commun avec S_1 et avec S_3. Par conséquent, on a bien $S_1 \text{ A } S_3$. ■

2.5 <u>Axiome</u> A_2. Pour toute paire de points, il existe un segment qui <u>les contient</u>.

Remarquons que pour une paire de points donnée, tous les segments qui les contiennent sont alignés les uns sur les autres en vertu du Corollaire 2.3.

2.6 Deux segments S_1 et S_2 sont dits <u>parallèles</u> s'ils sont alignés l'un sur l'autre ou si tout prolongement de S_1 est disjoint de tout prolongement de S_2. On note que S_1 et S_2 sont parallèles en écrivant $S_1 /\!/ S_2$. Le théorème suivant est évident.

2.7 Théorème. Si deux segments S_1 et S_2 sont parallèles, tout prolongement de S_1 est parallèle à tout prolongement de S_2.

L'axiome suivant nous permettra de démontrer que le parallélisme des segments est une équivalence.

2.8 <u>Axiome</u> A_3. Deux segments non disjoints parallèles à un même segment sont alignés l'un sur l'autre.

2.9 Théorème. Le parallélisme des segments est une équivalence.

<u>Démonstration</u>. La relation est réflexive en vertu de la réflexivité de la relation "être aligné sur". Elle est évidemment symétrique. Montrons qu'elle est aussi transitive. Soient S_1, S_2 et S_3 trois segments tels que $S_1 /\!/ S_2$ et $S_2 /\!/ S_3$. Supposons que S_1 ne soit pas parallèle à S_3. Alors il existe un prolongement S_1' de S_1 ayant une intersection non vide avec un prolongement S_3' de S_3. De plus S_1' et S_3' sont parallèles à S_2 grâce au Théorème 2.7. On a donc $S_1' \mathrel{A} S_3'$ par suite de l'Axiome A_3. Donc il existe un segment S tel que $S \cap S_1'$ et $S \cap S_3'$ contiennent plus d'un point. Or $S' = S_1' \cup S \cup S_3'$ est un segment, grâce à l'Axiome A_1. Mais S' est tel que $S' \cap S_1$ et $S' \cap S_3$ contiennent plus d'un point. Donc $S_1 \mathrel{A} S_3$, ce qui est absurde. ■

Enfin nous adoptons un quatrième axiome sur les segments, pour pouvoir démontrer, dans la section suivante, le théorème de parallélisme des droites.

2.10 <u>Axiome</u> A_4. Pour tout segment S et <u>pour</u> tout point a n'appartenant <u>pas à</u> S, il existe un segment contenant a <u>et parallèle à</u> S.

Nous sommes maintenant à pied d'oeuvre pour construire les droites avec les segments et pour démontrer les théorèmes d'incidence et de parallélisme pour les droites.

3. Droites.

3.1 Les classes d'équivalence de segments par la relation "être aligné sur" vont nous permettre d'engendrer les droites. On pourrait évidemment dire qu'une telle classe <u>est</u> une droite. Cependant, pour que la droite continue à être un ensemble de points comme dans la plupart des autres présentations de la géométrie, nous dirons plutôt ceci : une <u>droite</u> est l'union des éléments d'une classe d'équivalence de l'ensemble des segments par la relation "être aligné sur".

Une droite D est donc déterminée dès qu'on se donne un segment S de la classe d'équivalence qui lui correspond. Nous dirons qu'un tel segment S est un <u>représentant</u> de D.

On dit qu'une droite D <u>passe par un point</u> a ou que le point a <u>est sur la droite</u> D s'il existe un représentant de D qui contient a.

3.2 Lemme. Une droite passant par deux points a un représentant contenant ces deux points.

<u>Démonstration</u>. Soit D une droite passant par les points a et b. La droite D a un représentant S_1 contenant a et un représentant S_2 contenant b. Comme S_1 A S_2, il existe un segment S tel que $S \cap S_1$ et $S \cap S_2$ contiennent plus d'un point. Soit $S' = S_1 \cup S \cup S_2$. Il s'agit d'un segment (Axiome A_1) qui est aligné sur S_1 et S_2. Donc S' est un représentant de D contenant a et b. ■

3.3 Théorème d'incidence. <u>Par deux points distincts passe une et une seule droite</u>.

<u>Démonstration</u>. Soient a et b deux points distincts. Par suite de l'Axiome A_2, on sait qu'il existe un segment S qui les contient. La droite D définie par S passe par a et b. D'autre part, soit D' une droi-

te passant par a et b. On voit par le Lemme 3.2 qu'il existe un représentant S' de D' contenant a et b. Dès lors S' A S en vertu du Corollaire 2.3 et par conséquent D'=D. ■

3.4 Deux droites D_1 et D_2 sont dites *parallèles* s'il existe un représentant S_1 de D_1 et un représentant S_2 de D_2 tels que $S_1 /\!/ S_2$. On notera que D_1 et D_2 sont parallèles en écrivant $D_1 /\!/ D_2$.

Il résulte du Théorème 2.8 que le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites.

3.5 Lemme. *Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, tout représentant de D_1 est parallèle à tout représentant de D_2.*

Démonstration. Par définition du parallélisme des droites, il existe un représentant de D_1 parallèle à un représentant de D_2. La thèse résulte du fait que deux segments alignés l'un sur l'autre sont parallèles et de la transitivité du parallélisme des segments. ■

3.6 *Théorème du parallélisme*. *Pour toute droite D et pour tout point a qui n'est pas sur D, il existe une et une seule droite D' passant par a et parallèle à D.*

Démonstration. Soit S un représentant de D. Par suite de l'Axiome A_4, on sait qu'il existe un segment S_1 contenant a et parallèle à S. La droite D' définie par S_1 passe par a et est parallèle à D. D'autre part, soit D'' une droite passant par a et parallèle à D. Soit S_2 un représentant de D'' contenant a. Le segment S_2 est parallèle à S. Il résulte donc de l'Axiome A_3 que S_1 A S_2 et par conséquent D'=D''. ■

4. Commentaires.

4.1 S'il fallait ne faire qu'un seul commentaire sur cette axiomatique, ce serait celui-ci : surtout ne pas la servir à des élèves de 12 ou même de 15 ans.

4.2 Le prix qu'il a fallu payer pour réduire le seuil épistémologique entre la droite quotidienne et les premiers concepts de la géométrie, c'est celui d'un développement théorique supplémentaire : une équivalence sur les segments, un passage à l'espace quotient pour former le concept de droite et, en ce faisant, l'insertion d'un niveau ensembliste de plus. Toute infinie qu'elle était, la droite choisie comme objet primitif de la géométrie avait quelque chose de simple et de pur. D'objet unique, elle est devenue un assemblage, que ce soit comme classe d'équivalence ou comme réunion de segments. Il est vrai qu'elle était déjà et continuera d'être un ensemble de points.

4.3 Construire la droite avec des segments en géométrie synthétique, c'est en un sens prendre modèle sur la géométrie vectorielle. Car en géométrie vectorielle, on part d'un vecteur $\vec{e}$ base de la droite, et on engendre celle-ci comme ensemble des vecteurs $\alpha\vec{e}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. La droite est construite à partir d'un objet borné, à savoir $\vec{e}$.

4.4 Quoiqu'il en soit, l'axiomatique des segments aidera peut-être le professeur à parler de la droite aux débutants dans des termes raisonnables. L'idée de segment est assez claire, celle de prolonger un segment l'est aussi. Une droite est un ensemble de points qui est représenté par un segment (ou qui se construit à partir d'un segment) et qui inclut tous les prolongements de ce segment. Qu'est-ce que ça veut dire "la droite est illimitée" ? Simplement qu'elle inclut tous les prolongements, aussi longs soient-ils, d'un de ses segments.

4.5 La droite, construite dans la théorie axiomatique ci-dessus par alignement de segments, n'est pas forcément une droite illimitée. De toutes façons, nous avons arrêté le développement aux propriétés d'incidence et de parallélisme, et n'avons donc évoqué aucune propriété métrique. D'ailleurs, cette théorie admet des modèles finis et des modèles infinis immergés dans une partie bornée du plan euclidien. Ceci ne l'empêche pas de donner la clé d'un discours raisonnable sur les droites physiques. C'est qu'on peut, dans le modèle physique, interpréter les segments comme des segments bornés, et que ceux-ci, quelle que soit par ailleurs la géométrie physique, engendrent des droites dont le moins qu'on puisse dire est qu'elles sont très très longues.

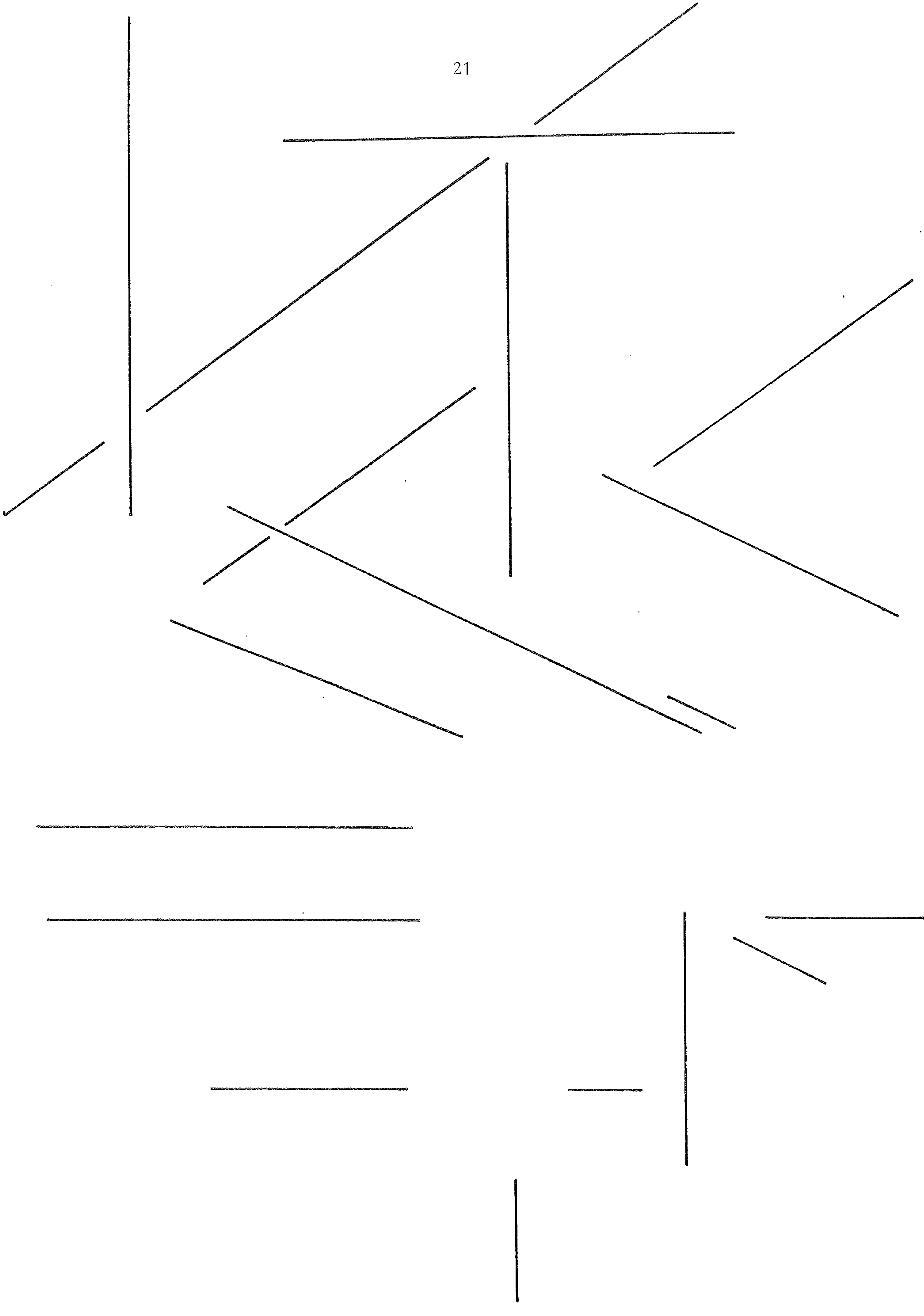
IV. Qu'en pensent les élèves ?

Les deux exercices suivants peuvent être vus sous divers angles :

ils sont un moyen de faire parler les élèves sur les segments et quelques notions voisines, et d'observer leurs conceptions;

- ils sont, pour un apprenti géomètre, un peu ce qu'est une gamme pour un apprenti pianiste;
- ils apprennent à réfléchir avant de parler et provoquent des échanges avec le professeur;
- ils ont souvent pour effet d'animer une classe.

1. La page suivante est parsemée de segments. Relève tous les segments parallèles et justifie tes résultats.



2. Pour chacune des propositions suivantes, détermine si elle est vraie ou fausse, et justifie ta réponse.
N.B. Quand il est question de prolongement d'un segment, il s'agit d'un deuxième segment qui inclut le premier.

1. Un segment est un ensemble de points.
2. Par un point, je ne peux faire passer qu'un seul segment.
3. Deux points déterminent un seul segment.
4. L'intersection de deux segments est toujours un singleton.
5. Si deux segments ont deux points communs, leur intersection est un segment.
6. L'union de deux segments est un segment.
7. Si l'intersection de deux segments n'est pas vide, leur union est un segment.
8. Si l'intersection de deux segments est un segment, leur union est un segment.
9. Deux segments sont alignés si leur intersection n'est pas vide.
10. On peut toujours prolonger un segment pour le faire passer par un point donné.
11. Si leur intersection est vide, deux segments sont parallèles.
12. Si par un point je trace deux segments S_1 et S_2 parallèles à un segment donné, $S_1 \cup S_2$ est un segment.
13. Deux segments alignés sont parallèles.
14. Deux segments sont alignés s'ils peuvent être inclus dans un même segment.
15. Deux segments non parallèles sont toujours sécants.
16. Deux segments non parallèles admettent des prolongements qui se coupent en un point.
17. Si deux segments ont deux points communs, ils sont confondus.
18. Deux segments parallèles d'un même segment sont toujours alignés.
19. Les prolongements d'un segment sont alignés.
10. Un segment aligné avec un autre est toujours inclus dans un prolongement de celui-ci.
21. Un segment est parallèle à tous ses prolongements.
22. Si l'intersection de leurs prolongements est vide, deux segments sont parallèles.

Remarque. Il est implicite que les segments dont il est question sont situés dans un plan. Les réponses varieront selon les définitions qu'on se donne pour segment, parallèle, etc.

Bibliographie

[1] A. Lalande, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, P.U.F., Paris, 1951.

[2] *Une géométrie pour tous les jours*, Dossier 2, Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1980.

[3] *L'archipel des isométries, Essai de redécouverte*, Dossier 3, Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1982.

Dossiers du GEM

n° 1 : *Une expérience d'enseignement mathématique à l'école professionnelle*; 22 pages, 1979, 40 FB.
n° 2 : *Une géométrie pour tous les jours*; 104 pages, 2^{e} éd., 1981, 130 FB.
n° 3 : *L'archipel des isométries, Essai de redécouverte*; 270 pages, 1982, 480 FB.

Propositions du GEM

n° 1 : *Le Groupe d'Enseignement Mathématique*; 13 pages, 1981, 30 FB.
n° 2 : *Rencontres avec l'infini*; 44 pages, 1981, 100 FB.
n° 3 : *L'outil vectoriel*; 21 pages, 1981, 60 FB.
n° 4 : *Les fonctions, c'est aussi autre chose ...*; 44 pages, 1981, 100 FB.
n° 5 : *Fouetter un chat avec une droite*; 24 pages, 1981, 75 FB.
n° 6 : *Une isométrie de l'espace vue à basse, moyenne et haute altitude*; 25 pages, 1982, 80 FB.
n° 7 : *Activités géométriques pour les écoles professionnelles ... et les autres*; 59 pages, 1982, 150 FB.
n° 8 : *Ecrire des maths*; 30 pages, 1983, 100 FB.
n° 9 : *Des élèves responsables ... c'est possible*; 10 pages, 1984, 30 FB.

Autres documents

M. Peltier, N. Rouche, M. Manderick, *Contremanuel de statistique et probabilité*; 196 pages, 1982, 530 FB.

La géométrie sur le terrain des élèves. Actes du Colloque inter-IREM de géométrie à Louvain-la-Neuve, mai 1983; 163 pages, 1984, 250 FB.

Diffusion

Pour recevoir ces documents, adressez vos commandes par lettre au GEM, chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgique). Ils vous seront expédiés accompagnés d'une facture et d'instructions pour le paiement. Chaque facture sera majorée de 50 FB pour la Belgique et 100 FB pour l'étranger (frais de port et d'expédition).

Dépôt légal : D/1985/3599/4