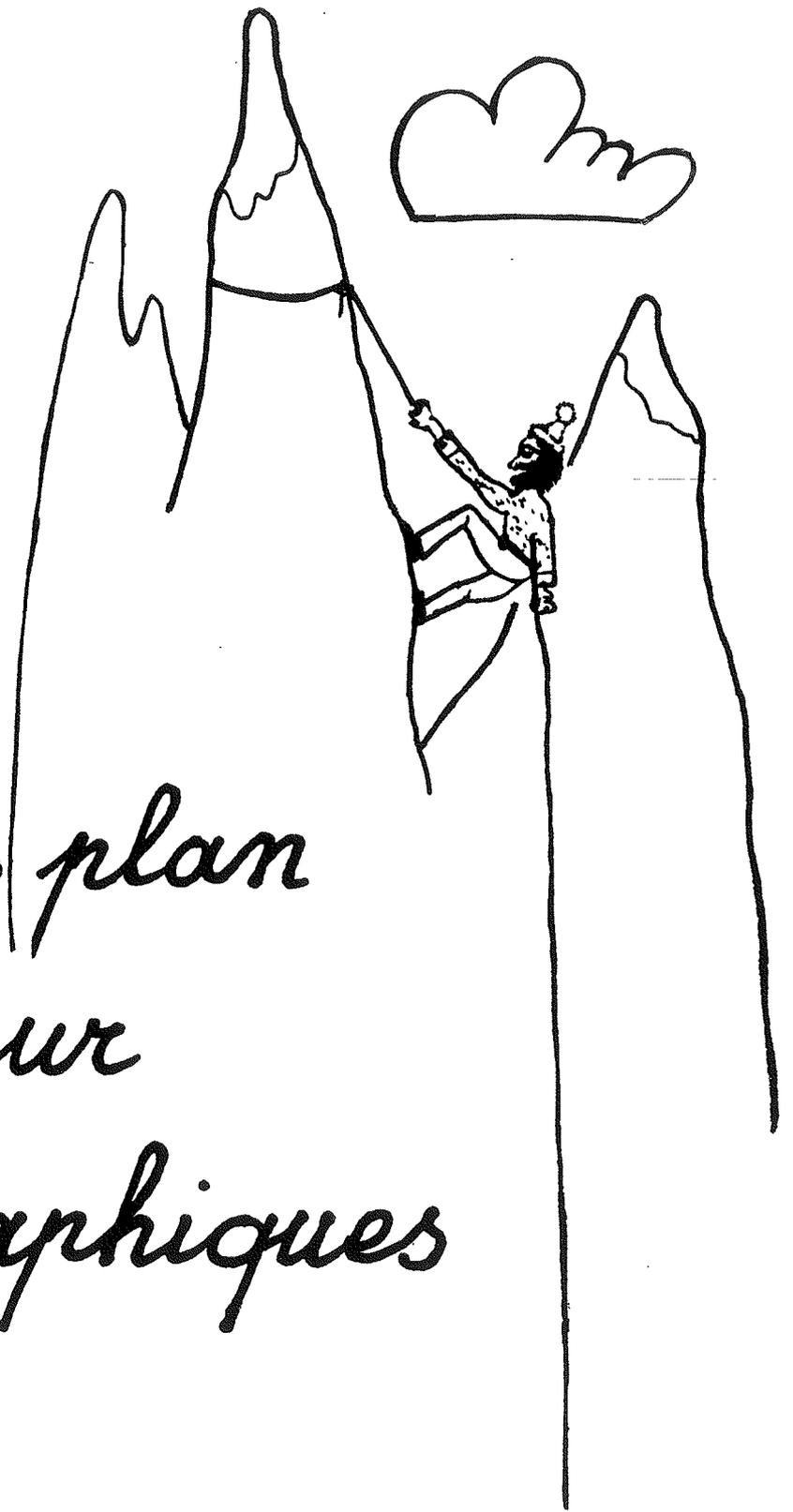


Propositions

11



Gros plan  
sur  
les graphiques

Groupe d'Enseignement Mathématique

Louvain-la-Neuve

Ce travail a été élaboré dans le cadre du sous-groupe "enseignement professionnel" 1984-1985 du GEM, dont les membres étaient Bernadette Connart, Carine Holvoet, Hugues Masy, Léon Moinil, Fabienne Rappe, Nicolas Rouche et Micheline Wilhelm.

Le texte a été rédigé par Hugues Masy et dactylographié par Béatrice Huberty.

Merci aux membres du GEM qui, grâce à leur collaboration et à leurs commentaires, ont permis d'améliorer ce travail.

## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
A. ACTIVITES GRAPHIQUES	3
1. Diagrammes et aires	3
2. Trafic (passagers) d'une compagnie aérienne	6
3. Les revenus des cadres	11
4. Chômage et popularité présidentielle	15
B. POINT DE VUE METHODOLOGIQUE	19
1. L'activité 1 : les maths ont un pouvoir instrumental pratique ...	20
2. Les activités 2 et 3 : gérer soi-même les problèmes ... et donc théoriser	20
3. Le message central adressé aux élèves	22
4. Pertinence mathématique des sujets abordés	22
5. Pertinence des activités mathématiques	24
BIBLIOGRAPHIE	27

---



## INTRODUCTION

Les activités suivantes sont extraites d'un travail réalisé par le sous-groupe "enseignement professionnel" du GEM. Au départ, l'idée générale était de sensibiliser et informer les élèves à propos de thèmes inspirés de la vie quotidienne et de ses aspects économiques. Nous avons sélectionné quelques situations qui les mènent à raisonner et conceptualiser "sur le tas", en se fondant sur leurs connaissances antérieures.

Parmi les quatre activités proposées ici, les deux premières ont été enseignées en classe, sous une forme plus détaillée et progressive, la troisième a été traitée par des adultes. Lors de l'élaboration de ces trois séquences autour des graphiques, nous n'avons pas déterminé *a priori* les points de matière que nous désirions voir apparaître en classe. Nous avons préféré sélectionner quelques situations réelles qui nous semblaient assez riches, et laisser ces situations déterminer la matière rencontrée au travers des problèmes qu'elles suggéraient. D'où les activités 2 et 3 ci-après. L'activité 1, qui ne traite pas un graphique "réel", joue le rôle d'une entrée en matière dans le but d'éveiller la vigilance des élèves. Enfin, l'activité 4 s'adresse à un public plus avancé.

Toutefois, il nous semblait dès l'abord utile que les situations paraissent suffisamment paradoxales, non seulement pour qu'elles soient stimulantes, mais aussi pour éviter un côté artificiel des situations problématiques habituellement proposées en classe : il est évident, aux yeux des élèves, que l'enseignement possède "la solution" <sup>1</sup>, alors pourquoi ne

---

<sup>1</sup> Il est bien connu que les problèmes scolaires doivent toujours posséder une solution, unique de surcroît.

donne-t-il pas immédiatement "le truc" ? Au contraire, face à des paradoxes, l'esprit critique (voire la méfiance) est nécessaire. C'est ici une occasion de mentionner en classe que les "autorités savantes" bien intentionnées ne sont pas inusables et qu'il faut donc apprendre à débrouiller des problèmes soi-même.

Comme le titre de cette brochure le laisse deviner, le texte qui suit est fragmentaire. Notre propos est, en partant de ces quelques situations problématiques, de communiquer les réflexions méthodologiques apparues au cours de leur élaboration et de leur expérimentation et qui nous ont parfois menés à des réflexions d'ordre plus général.

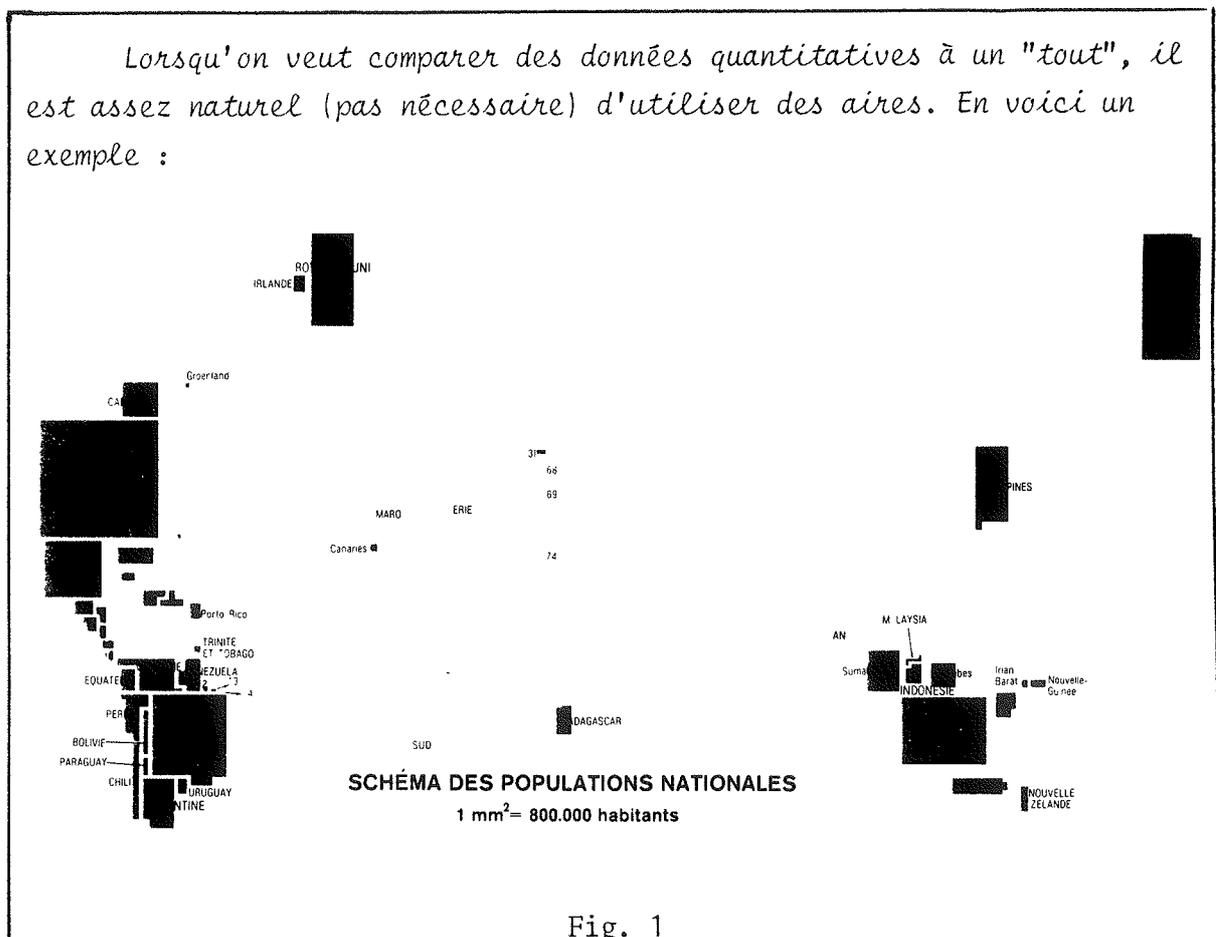
C'est ainsi que nous ne nous sommes pas attachés à relever systématiquement les divers aspects que peuvent prendre ces situations lorsqu'elles sont proposées à des élèves (par exemple, les élèves pourraient s'intéresser à l'impact de l'esthétique choisie par le graphiste, etc, ...) ni à dresser une liste complète des divers acquis mathématiques et méthodologiques que ces problèmes peuvent susciter. Ce travail pourrait donc être poursuivi et complété.

## A. ACTIVITES GRAPHIQUES

Souvent, les moyens d'information utilisent des graphiques pour représenter des données. Comment les lecteurs peuvent-ils les exploiter ? De quels facteurs le concepteur doit-il tenir compte pour que l'information "passe" le mieux ou, parfois ... comme il le désire ? Tenir compte de cela dans les activités.

1. Diagrammes et aires

*Lorsqu'on veut comparer des données quantitatives à un "tout", il est assez naturel (pas nécessaire) d'utiliser des aires. En voici un exemple :*



A priori, les formes des pièces composant ces diagrammes sont quelconques. Les aires des pièces sont proportionnelles aux données représentées. Y a-t-il d'autres contraintes de conception ou de lecture de ces diagrammes pour que l'information "passe" bien ? Voici une activité à ce sujet.

Les diagrammes suivants représentent deux groupes de 30 personnes chacun.

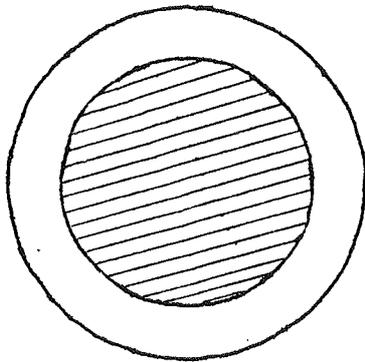


Fig. 2  
groupe A

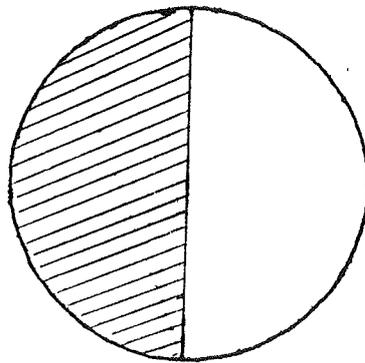


Fig. 3  
groupe B

Les aires hachurées représentent les hommes et, bien sûr, les femmes se partagent les aires blanches.

Tout bon misogyne voudra rejoindre le groupe où les hommes sont majoritaires. Aidez-le à choisir.

#### Quelques commentaires

1. Les deux aires hachurées sont égales, de même que les aires blanches.
2. Cette situation permet de signaler qu'il est très discutable de représenter, à l'aide de graphiques, des situations qui sont reflétées par deux nombres seulement.

3. L'exemple géographique proposé au début soulève le problème de savoir ce que veut dire un "tout" dans l'expression "comparer des données quantitatives à un tout". S'il est relativement aisé, dans cet exemple, de comparer le Brésil au "tout" que forme l'Amérique du Sud, il n'en est plus de même si le "tout" est l'ensemble des surfaces continentales.

Ainsi, dans ce type de diagrammes, il faut tenir compte, en plus de la proportionnalité des aires des pièces aux données représentées, de l'effet perceptif véhiculé par le diagramme. Nous retrouvons l'intervention de cet effet perceptif dans l'activité 2 qui suit.

## 2. Trafic (passagers) d'une compagnie aérienne

La fig. 4 est extraite d'un diagramme qui montre l'évolution du nombre de passagers de la compagnie aérienne française U.T.A. entre 1965 et 1969.

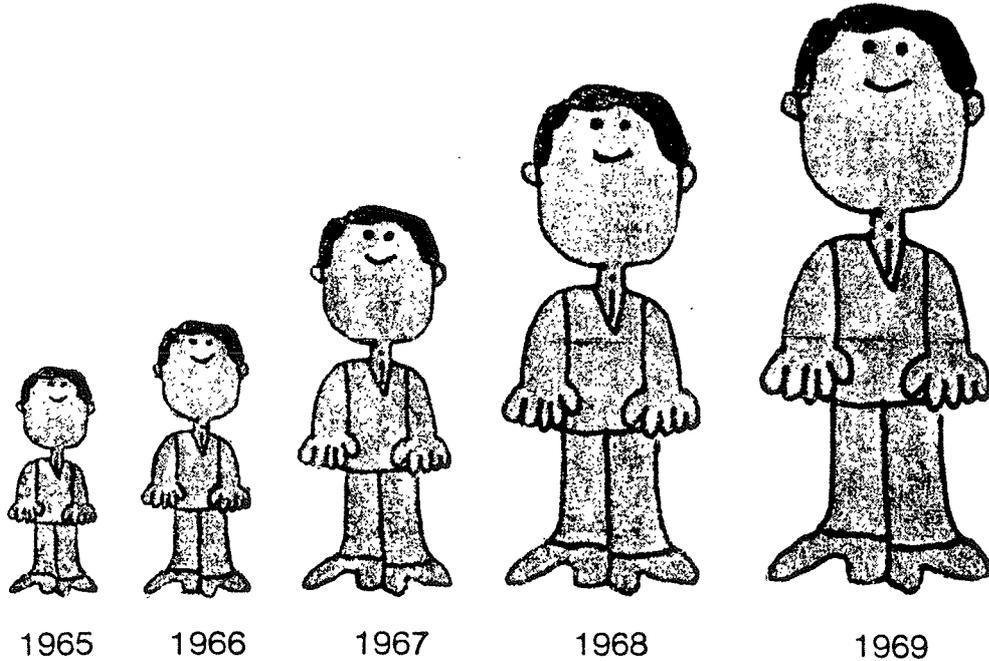


Fig. 4

1. Jetez un coup d'oeil sur cette figure et évaluez le rapport entre les trafics de 1965 et 1969, en vous basant sur votre perception des aires.
2. Évaluez ce même rapport par une autre méthode.
3. Et si, au lieu des aires, on se basait sur les hauteurs ?
4. Déterminez le rapport réel entre les trafics de 1965 et 1969 en utilisant le diagramme de la page suivante. En 1969, le trafic était de 330 000 passagers.

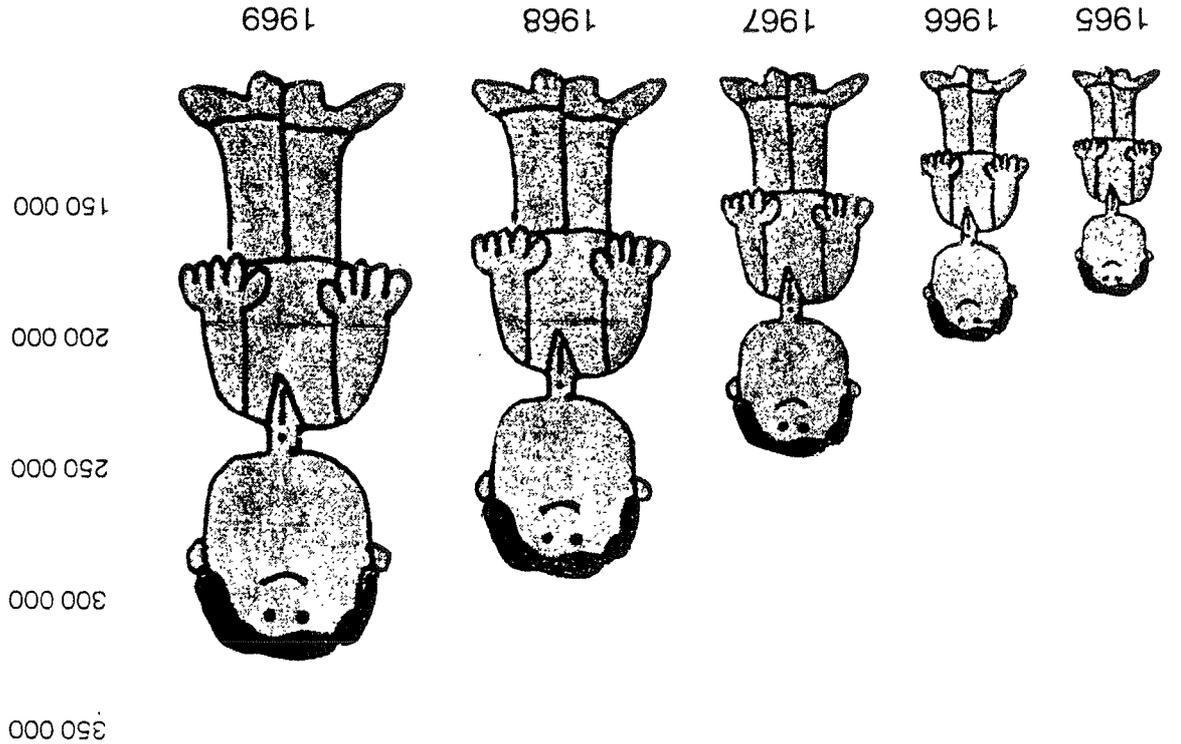


Fig. 5

A ne pas consulter avant la question 4 !

5. Vous êtes graphiste et votre patron vous demande de réaliser une nouvelle version de ce graphique (mêmes trafics, même type de bonshommes), mais avec un rapport entre les aires des bonshommes de 1969 et 1965 égal à 10.

Après avoir catégoriquement refusé, vous rentrez chez vous et, pour votre édification personnelle, a) vous le réalisez quand même,

b) vous vous demandez si ce type

de graphiques permet d'obtenir une exagération aussi grande que l'on veut. Justifiez votre conclusion.

6. Pour information, voici quelques autres diagrammes intéressants :

Production industrielle par habitant  
1973 en dollars

Amérique  
du Nord

1e

Fig. 6

Extrait d'une publication C.E.E.

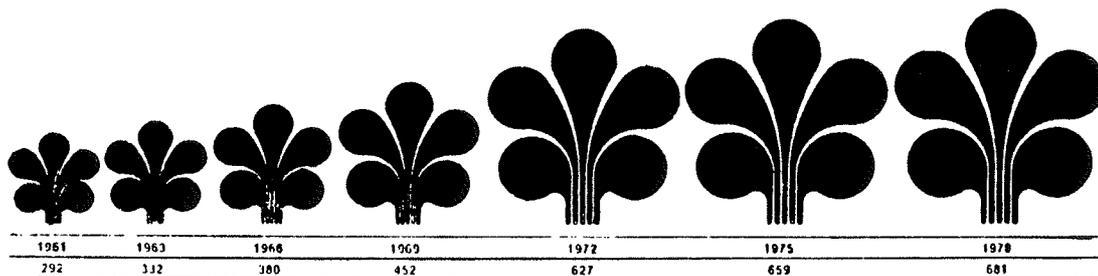


Fig. 7

Evolution du personnel employé par une banque  
de 1961 à 1978

### Quelques commentaires

1. Les impressions données par les bonshommes de 1965 et 1969 donnent assez souvent un rapport évalué entre les aires variant entre 4 et 6. La première valeur est à associer à une évaluation "au jugé", la deuxième est souvent obtenue par un essai de "pseudo-pavage" mental du grand bonhomme par le petit.
2. Le rapport des aires exact est aux environs de 6,5.

3. Le rapport des hauteurs est donc aux environs de  $\sqrt{6,5}$ , c'est-à-dire environ 2,6.<sup>2</sup>
4. Quant au rapport réel des trafics, il vaut  $\frac{330\ 000}{190\ 000}$ , c'est-à-dire environ 1,74.

(Remarque : le graphiste a omis d'indiquer les repères de la graduation de l'axe des ordonnées (où se trouve exactement l'ordonnée 300 000 par exemple ?). Comme on sait que la valeur associée à 1969 est 330 000, on peut donc constater que l'ordonnée 300 000 se trouve au niveau des points inférieurs de l'inscription :  $\perp$  300 000).

Mais voilà qu'un paradoxe nouveau apparaît en classe : on pourrait s'attendre à ce que les nombres obtenus en 3 et 4 (2,6 et 1,74) soient sensiblement égaux. D'où cette exagération provient-elle ? L'extrémité inférieure des bonshommes correspond à l'ordonnée 100 000 ...

5. a) Pour que le rapport des aires des bonshommes concernés soit égal à 10, il faut choisir l'ordonnée  $e$  correspondant à l'extrémité inférieure des bonshommes de telle manière que

$$\frac{(330\ 000 - e)^2}{(190\ 000 - e)^2} = 10.$$

L'équation du second degré obtenue a deux racines réelles : 125 253,46 et 223 635,42, cette dernière valeur étant à rejeter, si l'on veut que la tête du bonhomme de 1965 ne soit pas ... sous ses pieds.

Bien sûr, il vaut mieux résoudre

$$\frac{330\ 000 - e}{190\ 000 - e} = \sqrt{10},$$

qui fournit bien plus aisément le résultat.

- b) Si l'on se donne le choix de l'ordonnée notée  $e$  ci-dessus, on peut bien entendu obtenir une exagération aussi grande que l'on veut, en approchant suffisamment l'ordonnée  $e$  de la valeur 190 000, par valeurs inférieures.

---

<sup>2</sup> La démarche des élèves sur ce point n'a pas été celle présentée ici : ils ont (bien sûr) tout simplement mesuré les hauteurs et calculé le rapport. Voir plus loin (en 3) pour plus de détails.

On s'en convainc aisément en considérant la fig. 5. Certains élèves veulent obtenir une définition de l'exagération qui se traduise par une écriture symbolique. Par exemple,

$$E(e) = \left( \frac{330\ 000 - e}{190\ 000 - e} \right)^2 / \frac{330\ 000}{190\ 000} = \left( \frac{x_1 - e}{x_0 - e} \right)^2 / \frac{x_1}{x_0}$$

avec  $x_0 = 190\ 000$  et  $x_1 = 330\ 000$ .

## 3. Les revenus des cadres

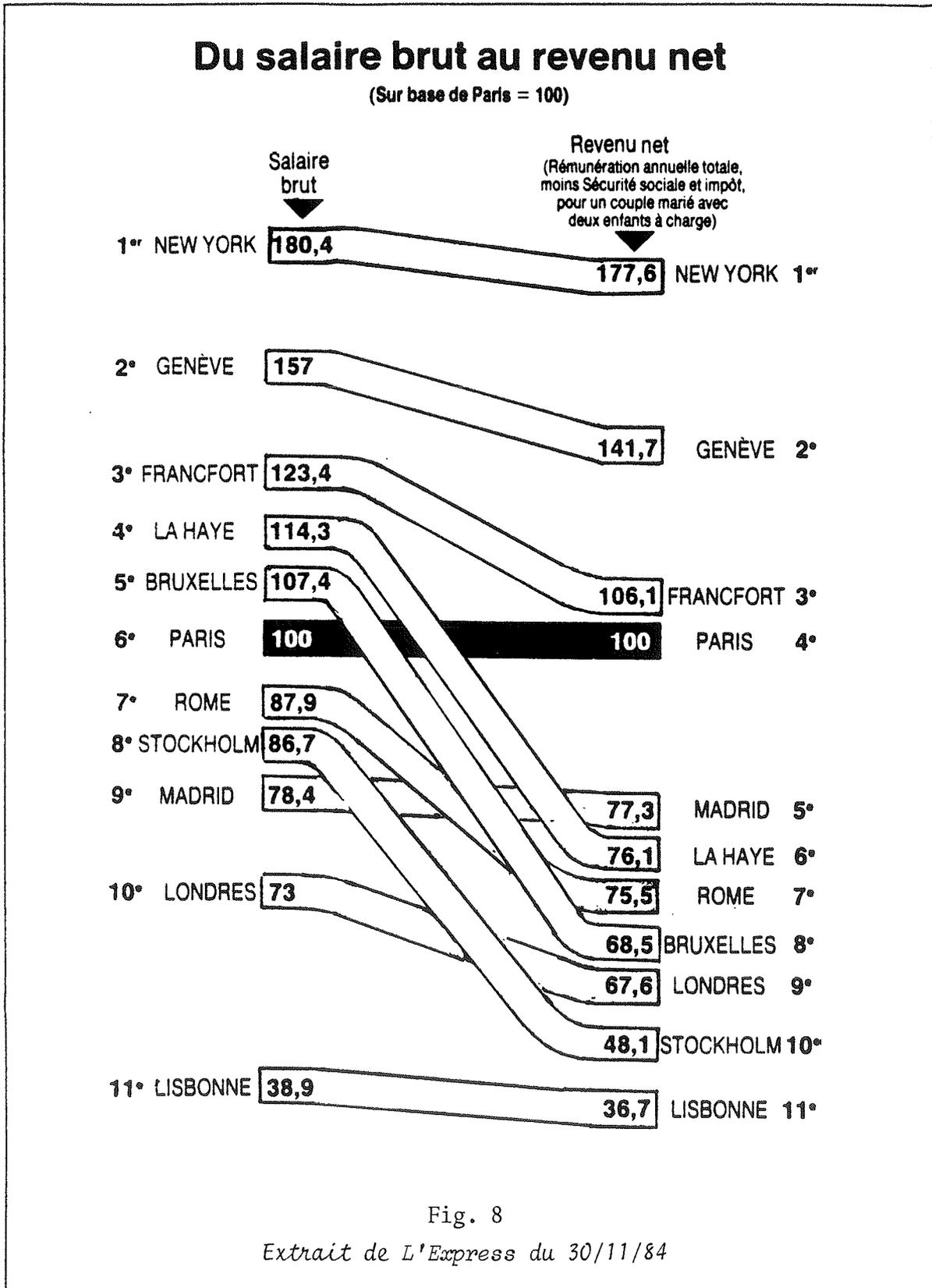


Fig. 8

Extrait de L'Express du 30/11/84

0. Lisez d'abord ce diagramme à votre aise, sans vous occuper des questions qui suivent.
  1. Un de mes amis français est cadre. Le fisc l'a tant fait souffrir que son seul critère pour trouver un nouvel emploi est basé sur la proportion de ponction directe que l'Etat opère dans son revenu. Il m'a annoncé ce matin qu'il a lu un diagramme de l'Express (fig. 8) et qu'il cherche un emploi à Madrid. Aidez-moi à confirmer ou à infirmer son choix. (En d'autres termes, dans quelle ville trouve-t-on la plus petite proportion de ponction directe sur le revenu ?)
  2. Le graphiste de l'Express a refusé de placer Moscou : les données (brut : 40, net : 80) lui semblaient inversées. Avait-il raison ou devrais-je conseiller à mon ami d'aller travailler à Moscou ? (\*)
  3. Comparez exactement la ponction relative entre Bruxelles et Stockholm (sans référence à Paris).
  4. Les Belges sont nombrilistes, c'est bien connu. Refaire le diagramme sur base de Bruxelles = 100.
  5. Rassemblez vos commentaires de tous ordres sur ce diagramme et sur le critère de choix du cadre de la question 1.
- (\*) En tous cas, les données indiquées pour Moscou sont imaginaires.

### Quelques commentaires

1. En fait, c'est Paris qui, d'après ce diagramme, jouit de la plus faible ponction (en proportion), suivie immédiatement par Madrid. Le fait que les deux suites de données sont indiquées "sur base de Paris = 100" induit assez souvent l'impression qu'on ne peut rien conclure sur Paris à partir du diagramme et, parfois, cette impression se généralise : peut-on conclure quoi que ce soit ? La question 3 demande à ceux qui ne doutent pas ainsi de formuler leur analyse. Les autres sont face à un paradoxe, qu'on peut lever en formulant le lien entre les deux suites de données.

Soient  $p(V)$  la ponction directe dans la ville  $V$  ( $p(V) \in ]0,1[$ ),  $B(V)$  le salaire brut dans  $V$ ,  $N(V)$  le revenu net dans  $V$ . Le graphique indique  $b(V)$  salaire brut dans  $V$ , base Paris = 100 et  $n(V)$ , revenu net

dans  $V$ , base Paris = 100. On a

$$N(V) = B(V) (1 - p(V)).$$

On peut appeler  $g(V) = 1 - p(V)$  la "générosité" de la ville  $V$ . On a donc

$$N(V) = B(V) g(V).$$

Le lien entre les valeurs  $n(V)$  et  $b(V)$ , relatives à Paris, est donc

$$n(V) = \frac{b(V) g(V)}{g(\text{Paris})}$$

le dénominateur assurant que  $n(\text{Paris}) = b(\text{Paris})$ , d'où

$$\frac{g(V)}{g(\text{Paris})} = \frac{n(V)}{b(V)}.$$

On a donc bien sûr p.e.  $\frac{n(V)}{b(V)} < 1 \Leftrightarrow g(V) < g(\text{Paris})$ .

C'est donc bien en restant en France que notre cadre, d'après ce diagramme, verra son critère réalisé : la "générosité" y est maximum, donc la ponction minimum.

2. Cette question (peut-on avoir un "net"  $n(V)$  supérieur au "brut"  $b(V)$ ?) fait parfois douter ceux qui n'ont pas trouvé la question précédente paradoxale. Mis à part le fait que les données indiquées pour Moscou sont fantaisistes, un couple de valeurs tel qu'indiqué n'est pas impossible : il suffit d'adjoindre une ville  $W$  telle que  $g(W) > g(\text{Paris})$ . (En existe-t-il ?)
3. On a

$$\frac{g(\text{Stockholm})}{g(\text{Bruxelles})} = \frac{\frac{g(\text{Stockholm})}{g(\text{Paris})}}{\frac{g(\text{Bruxelles})}{g(\text{Paris})}} = 0,87.$$

Ce résultat semble infirmé par les pentes indiquées par le diagramme : il faut alors constater que les graduations ne sont pas régulières ... Ceux qui n'ont pas ressenti le besoin de formuler pour résoudre les questions 1 et 2 produisent alors le raisonnement :

$$n(V) = 100 \times \frac{N(V)}{N(\text{Paris})} = 100 \times \frac{B(V)(1 - p(V))}{B(\text{Paris})(1 - p(\text{Paris}))} = b(V) \frac{1 - p(V)}{1 - p(\text{Paris})}$$

en prenant  $V = \text{Stockholm}$ , puis  $V = \text{Bruxelles}$  et passant au quotient, ils obtiennent

$$p(\text{Stockholm}) = 0,87 p(\text{Bruxelles}) + 0,13.^3$$

<sup>3</sup> d'où  $p(\text{Stockholm}) \in ]0,13; 1[$ , mais comme  $p(\text{Bruxelles}) \in ]0,36; 1[$  (pourquoi ?), on trouve  $p(\text{Stockholm}) \in ]0,44; 1[$ . Si les données pour Moscou n'étaient pas fantaisistes, elles entraîneraient  $p(\text{Paris}) \in ]0,5; 1[$

La présence du terme 0,13 mène à une impasse qui rend difficile, d'un point de vue psychologique, la considération de  $g(V) = 1 - p(V)$  : cette impasse laisse parfois une impression de problème impossible.

4. Soit par exemple  $b^*(V)$  le salaire brut sur base de Bruxelles = 100.

On a

$$b^*(V) = 100 \times \frac{b(V)}{b(\text{Bruxelles})}$$

et on traite les revenus nets de la même façon.

5. On le voit, ce diagramme, extrait d'un article destiné aux cadres ("Cadres : évaluez vos salaires pour 1985") contient des informations peu exploitables : le salaire brut n'est qu'un nombre théorique pour le salarié, le revenu net doit être pondéré par son pouvoir d'achat, et la "générosité" directe ne se reflète pas nécessairement au niveau des taxes indirectes. D'ailleurs, la définition d'un cadre à Lisbonne ou à Bruxelles est-elle la même qu'à Paris ? Et puis, quelle est la source de ces chiffres ? Enfin, signalons que l'article dont est extrait ce graphique ne le commente pas, et n'y renvoie pas non plus ...

#### 4. Chômage et popularité présidentielle

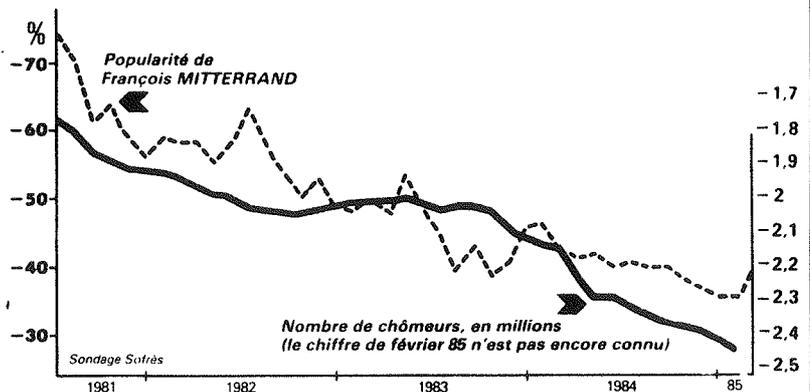
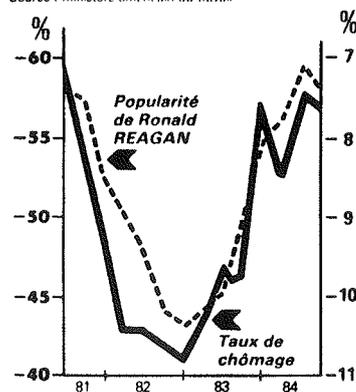
Pour terminer, voici une activité que nous vous proposons d'étudier et d'exploiter vous-même.

# LE GRAPHIQUE QUI OBSÈDE MITTERRAND

*Entre la courbe du chômage  
aux Etats-Unis et celle de la popularité de Reagan,  
le parallélisme est saisissant. Le message,  
à l'Elysée, a été reçu cinq sur cinq*

## CHÔMAGE ET POPULARITÉ POUR REAGAN... ET POUR MITTERRAND

Source : ministère américain du travail



**F**rançois Mitterrand peut-il gagner ? Après les artifices référendaires de l'été et les coups médiatiques des derniers mois, il a désormais une stratégie. Elle a la simplicité machiavélique des bons plans de campagne. Un des conseillers importants de l'Elysée garde comme talisman, plié en quatre dans sa poche, un article du « New York Times » du 26 octobre dernier. Il y est dit que « presque tous les

clignotants économiques » favoriseront la réélection de Reagan. Un graphique saisissant (voir graphique n° 1) met en lumière l'exacte concordance des courbes du chômage et de la popularité du président américain. Le chef de l'Etat l'a montré à plusieurs reprises, ces temps-ci. Pour la France, la similitude des deux courbes est tout aussi frappante (graphique n° 2).

Un autre conseiller de François Mitterrand, non moins important, a mis de côté sur son bureau un exemplaire de la très sérieuse revue américaine « Public Opinion », qui développe le même thème dans son numéro de novembre dernier. Tous les mythes sur la popularité de Ronald Reagan y sont allègrement démolis, sondages à l'appui. Les Américains le trouvent supersympa ? Pas plus que ses prédécesseurs. Il est plus populaire que sa politique ? Historiquement, presque tous les présidents américains l'ont été. Il sait manipuler les médias ? D'après une étude du professeur Smoller sur le Journal télévisé de C.B.S., les commentaires lui sont plus défavorables qu'ils ne l'étaient pour Carter ou Nixon. Alors ?

### ASSOUPHIR, ASSOUPHIR...

Alors, aux yeux des Américains, Ronald Reagan est tout simplement l'homme qui a remis leur pays en marche et au travail. Comme le note William Adams, l'auteur de l'article, « *c'est sa performance en économie qui lui a le plus rapporté* ». Et il révèle que les chiffres du chômage pèsent pour 80 % sur la popularité présidentielle.

Depuis des mois, l'Elysée faisait tourner ses ordinateurs pour y dénicher, dans l'inconscient collectif des Français, les raisons de l'impopularité présidentielle. En vain. « *Il n'est pas assez présent* », disait le conseiller en communication Claude Marti. « *Il parle trop* », disait un autre. Aujourd'hui, l'Elysée a enfin démasqué le coupable : c'est le chômage, et lui seul.

Fort de cette nouvelle science, François Mitterrand déclarait le jeudi 7 février, lors de son voyage en Picardie : « *1985 annonce l'inversion de la courbe.* » Pas de chance : huit jours plus tard, les statistiques du ministère du Travail qui tombaient sur les télésécriseurs lui infligeaient un cinglant démenti. Aujourd'hui, 2 443 500 demandeurs d'emploi — en données corrigées — sont inscrits sur les fichiers de l'A.N.P.E. Ce qui fait 292 000 chômeurs de plus en un an. En 1982 et 1983, le chômage avait augmenté d'environ 5 %. En 1984, de 13,6 % ! Et ce n'est peut-être qu'un début. D'après une étude de l'O.C.D.E., le taux de chômage en France, qui se maintenait à 7 % en 1980, devrait culminer à 12 % en 1990.

Que faire alors ? Pour renverser le mouvement, le gouvernement table sur sa relance douce et sur les 3 % de croissance annoncés par Pierre Bérégovoy pour cette année. Mais à l'heure des mutations technologiques, la croissance, ça ne suffit pas. Loin de là. Elle ne fabrique pas automatiquement des emplois. Comme le note Lionel Stoleru, ancien secrétaire d'Etat de Giscard, dans « *l'Alternance tranquille* » — un livre percutant et corrosif à paraître chez Flammarion —, « *au-dessous de 2,5 % de croissance annuelle, un pays industriel ne crée pas un seul emploi : il en perd* ». Et il ajoute : « *Pour supprimer le chômage en France par le seul effet de la croissance, il faudrait une croissance de 27 % par an pendant des années.* »

Il faut donc envisager d'autres solutions. Par exemple, la redynamisation des 216 000 P.M.E. de France, qui représentent les deux tiers du marché du travail. Ou bien le développement de la formation, encore que les jeunes qui refusent les stages Rigout aient moins de mal à trouver du travail que ceux qui en sortent. Ou bien la multiplication des T.U.C. (travaux d'utilité collective). Et les « tucards » ne sont pas des tocards : cent mille jeunes se consacrent déjà à des petites tâches sociales et culturelles (1 200 francs par mois pour vingt heures hebdomadaires). Laurent Fabius a promis qu'ils seront deux cent mille à la fin de l'année. S'ils voient le jour, les C.F.R. (congé-formation-recherche d'emploi) devraient prendre en charge cent cinquante mille personnes d'ici à 1986. Autant de monde qui disparaîtra des statistiques officielles du chômage. « *Si on m'apporte une idée par jour, dit Delebarre, je la mettrai en œuvre.* »

Ravaudage, dira-t-on. Jusqu'à présent le gouvernement ne s'était pas attaqué au vrai problème : la rigidité. Au Japon, l'emploi est garanti à vie mais les salaires sont élastiques. Aux Etats-Unis, c'est l'inverse. Résultat : dans les deux cas, le chômage est remarquablement faible. En France, en revanche, tout est bloqué. C'est pourquoi Michel Delebarre a fait adopter par le conseil des ministres, mercredi dernier, un premier train de mesures en faveur du travail partiel. Objectif : quarante mille chômeurs de moins. Avec en prime, on l'espère, une nouvelle montée de la cote de Mitterrand.

*FRANZ-OLIVIER GIESBERT*

### Fig. 9

*Extrait du Nouvel Observateur du 22/02/85*

0. Dressez la liste des questions que la lecture de ces graphiques vous suggère et proposez des solutions.

1. Pour chacun des deux diagrammes, peut-on améliorer l'ajustement des courbes de chômage et de popularité ?
2. Vous êtes président de la République Française et vous désirez ardemment être plus populaire - au sens des statistiques. Le graphique proposé vous assure-t-il qu'une action efficace sur le chômage réalisera votre désir ?
3. Vous êtes chômeur français et vous désirez ardemment que peu de vos compatriotes connaissent une situation aussi précaire. Pour être efficace, devez-vous les convaincre de répondre favorablement à Mitterrand lors des prochains sondages Sofrès ?



## B. POINT DE VUE METHODOLOGIQUE

Bien que nous n'ayons pas fixé d'objectif théorique *a priori* à ces activités, les problèmes posés par les graphiques ont mené les élèves à manipuler des fonctions simples (premier ou second degré) et leur ont ménagé une première rencontre avec les similitudes directes, que nous avons nommées en classe "agrandissements".

Les élèves des sections professionnelles sont souvent abreuvés de colonnes de calcul littéral, à effectuer de manière assez mécanique. On minimise ainsi la conceptualisation (en particulier celle qui serait effectuée par les élèves eux-mêmes) et donc l'activité de modélisation de situations réelles. Cela nous semble regrettable : il s'agit d'activités recouvrant des acquis réinvestissables dans l'univers quotidien des élèves. Ce dernier point pose la question "pourquoi *inventer* des problèmes ?" puisqu'après tout, ce qui nous entoure, nous et les élèves, pose spontanément pas mal de questions. Toutefois, il n'est ni nécessaire ni suffisant qu'un problème soit réel pour qu'on trouve du plaisir à tenter de le résoudre ou pour qu'il soit intéressant. Il n'en reste pas moins qu'un enseignement mathématique peut trouver sa raison d'être ailleurs qu'au niveau d'un divertissement des élèves prêts à "jouer le jeu", à "relever le défi intellectuel". Après tout, il faut aussi penser à "transmettre une attitude critique à l'égard de la science et de ses usages, qui se dégage de la science elle-même ou de la connaissance des usages sociaux qui en sont faits" [1].

Une façon d'aider à réaliser cela nous semble être d'enseigner en apprenant aux élèves à dépasser la contemplation (d'une situation, d'une solution proposée) pour devenir acteur critique. Les situations qui s'articulent autour d'un "faire" concret conviennent bien à ce but.

## 1. L'activité 1 : Les maths ont un pouvoir instrumental pratique ...

Comme indiqué plus haut, cette activité est un hors-d'oeuvre destiné à installer l'ambiance : il conviendra d'envisager les situations avec un esprit critique. Dans le cas de ces deux diagrammes circulaires, une réaction typiquement due à la conception du milieu scolaire qu'ont les élèves apparaît : si la réponse est tellement évidente, c'est qu'il y a un piège ! A partir de cela, les élèves démontent rapidement la situation : les mesures quantitatives de grandeurs ne correspondent pas nécessairement aux évaluations perceptives, en particulier si, au contraire de la fig. 3, les objets concernés n'exhibent pas eux-mêmes de "bon pliage" fournissant des indications à la vision. Cette constatation permet de porter un regard neuf sur les graphiques : le langage de ce moyen de communication est quantitatif, et les interprétations qualitatives doivent s'appuyer sur ce fait. C'est en jetant un regard insolite sur le familier qu'on apprend.

## 2. Les activités 2 et 3 : Gérer soi-même les problèmes ... et donc théoriser

Considérons d'abord l'activité 2 : un diagramme fait de bonshommes ... Après l'activité 1, les deux premières questions sont naturelles et simulent les lectures grossières du graphique. Typiquement, les élèves traitent la question 2 en encadrant les deux bonshommes concernés dans des rectangles, puis calculent le quotient des aires de ceux-ci. Ils obtiennent ainsi environ 6,5. La question 3 est alors résolue par mesures, sans évoquer la possibilité d'évaluer ce rapport de hauteur par  $\sqrt{6,5}$  : les élèves n'ont pas encore étudié les similitudes. La question 5 a) leur ménage une première rencontre raisonnée avec elles. Avant cela, la question 4 pose aux élèves qui désirent une lecture précise des ordonnées un problème de graduation de l'axe des ordonnées de la fig. 5 : un autre graphique, non repris ici, permet de connaître le trafic en 1969 : 330 000 passagers. Contrairement à la démarche classique, il faut ici déterminer l'emplacement des graduations après que les points aient été placés sur le diagramme.

La question 5 a) est le coeur de l'activité : il s'agit d'y considérer la classe des diagrammes pareils à la fig. 5, mais dont l'ordonnée "de départ" (100 000 pour la fig. 5) est variable, et d'y sélectionner celui qui fournit le rapport d'aires (10) demandé. L'attention a été

attirée sur le rôle de l'"ordonnée de départ" après les questions précédentes (voir commentaires de l'activité au § A.2.). La solution de tâtonnement est assez décevante : il faut à la fois obtenir une aire 10 fois plus grande, et maintenir la forme des bonshommes (ou des rectangles d'encadrement), c'est-à-dire, pour les élèves, "agrandir la largeur et la hauteur de la même façon". Ils s'en tirent en considérant les rectangles mentionnés plus haut : on ne dispose pas de formule fournissant l'aire d'un bonhomme. Par contre, on en connaît une pour les rectangles :  $S = l \times h$ . Après agrandissement de rapport  $k$ , on aura

$$S_{1969} = k l_{1965} \cdot k h_{1965} = k^2 S_{1965},$$

et on doit avoir

$$\frac{S_{1969}}{S_{1965}} = k^2 = 10.$$

On trouve ainsi  $k$ . On peut alors dessiner les deux bonshommes, adapter les graduations, puis dessiner les autres en utilisant les graduations et en respectant le coefficient de forme des rectangles d'encadrement.

Une autre méthode consiste à graduer arbitrairement et déterminer l'ordonnée "de départ"  $e$  :

$$\frac{S_{1969}}{S_{1965}} = k^2 = \left( \frac{h_{1969}}{h_{1965}} \right)^2 = \frac{(330\ 000 - e)^2}{(190\ 000 - e)^2};$$

la suite du raisonnement est mentionnée aux commentaires de l'activité (§ A.2.).

Pour rendre ces raisonnements rigoureux, il faudrait définir les similitudes directes et étudier leur caractère affine. A vrai dire, à ce stade, la classe n'en avait que faire. Toutefois, la notion de similitude sera un peu précisée lors de la réalisation des diagrammes : les bonshommes peuvent être agrandis en utilisant un pantographe ou un quadrillage des rectangles d'encadrement ...

Les élèves ont, de cette façon, établi "sur le tas" une propriété des similitudes. Ils ont ainsi vécu un petit morceau de la construction d'une théorie en vue de son *application* à un contexte pré-existant. Souvent, l'enseignement ne fournit que des situations d'*illustration*.

HILTON [2] donne une distinction éclairante entre les termes application et illustration, qui nous semble utile pour préciser le statut des situations problématiques. En substance, il écrit ce qui suit : considérons une situation et une théorie. La situation est une *application* de la théorie si la compréhension de la théorie clarifie la situation. La situation est une *illustration* de la théorie si la compréhension de la situation éclaire la théorie.

Les élèves seront peut-être aussi conscients qu'une bonne façon de "démontrer" une situation est d'essayer de se mettre dans les conditions qu'a rencontrées son concepteur : ici, pour démontrer les diagrammes trompeurs, rien de tel que d'en réaliser soi-même !

Enfin, signalons pour l'activité 3 la différence entre l'aspect "soustractif" ( $n(V) = b(V) (1 - p(V))$ ) et l'aspect "divisif"  $\left( \frac{n(V)}{b(V)} = \frac{g(V)}{g(\text{Paris})} \right)$  : le premier mène, pour la question de l'activité, à  $p(\text{Stockholm}) = \dots 0,87 p(\text{Bruxelles}) + 0,13$ , et l'autre à  $g(\text{Stockholm}) = 0,87 g(\text{Bruxelles})$ . Cette différence de traitement suivant les aspects "additif" et "multiplicatif" se retrouve dans le calcul des intérêts composés.

### 3. Le message central adressé aux élèves

En résumé, nous visons à faire acquérir aux élèves, par ces activités et via le réinvestissement et l'élaboration de connaissances mathématiques, un pouvoir de réalisation et d'interprétation des graphiques en démontant leur langage. Par cela même, nous voulons contribuer à donner un statut moins stéréotypé, moins hermétique, aux maths.

### 4. Pertinence mathématique des sujets abordés

Et du point de vue de la pertinence mathématique ?

La réaction d'un mathématicien à la vue de ces activités a été "c'est pas des maths, c'est de la publicité". En effet, les représentations utilisées ne sont pas les représentations "canoniques" du mathématicien, très dépouillées, et qu'on trouve cataloguées dans les exposés

élémentaires de statistique et probabilité, par exemple. Or, selon nous, travailler des objets et des contextes non mathématiques à l'aide des maths est à l'opposé d'une dénaturation des constructions mathématiques. C'est que l'élargissement des graphiques considérés à ceux proposés dans les médias rend le champ problématique très vaste : presque chacun d'eux mène à un problème spécifique d'interprétation, de critique ou d'exploitation. Raison de plus pour s'y exercer ...

D'autre part, les problèmes proposés concernent des notions et propriétés simples. Plus d'une fois, les activités proposées nous ont montré qu'il ne faut pas nécessairement que la "matière" concernée soit difficile ou astucieuse pour que la situation problématique soit fructueuse.

Ensuite, ces situations peuvent servir à préciser le statut épistémologique de certains objets ou outils mathématiques. Par exemple, dans l'activité 2, les élèves encadrent les bonshommes par des rectangles, et raisonnent sur ceux-ci. On traite ainsi la similitude de figures complexes à l'aide d'une figure simple. Le discours habituellement tenu à nos élèves est plutôt le suivant : "étudions d'abord les figures simples; nous nous occuperons évidemment des figures plus complexes ensuite". A un stade plus caricatural, on retrouve ce discours au niveau de l'apprentissage au raisonnement dans l'introduction du cours de géométrie pour enseignement secondaire de BIRKHOFF et BEATLEY [3] : après avoir présenté deux situations d'argumentation quotidienne impossibles à débrouiller, les auteurs concluent "pour satisfaire les exigences de notre vie quotidienne, nous devons savoir comment argumenter et comment prouver [ ... ]. Toutefois, il est difficile d'apprendre toutes ces choses à partir de situations telles qu'elles apparaissent dans notre vie de tous les jours. Ce qu'il nous faut, c'est un ensemble de situations abstraites et bien impersonnelles, pour argumenter, et dans lesquelles une position est certainement bonne et l'autre certainement mauvaise. Pour cela, la meilleure source de situations est la géométrie". A la fin du livre, les auteurs "oublent" de montrer "comment satisfaire les exigences de notre vie quotidienne" après le cours.

Enfin, le traitement de tels problèmes mène à un décroisement des sujets : on y trouve aussi bien du calcul algébrique de base que des

propriétés de similitude.... Après tout, dans la résolution d'un problème, on essaye de faire flèche de tout bois, tandis que "les cours traditionnels ressemblent trop souvent à l'inventaire d'un atelier : ici vous avez des marteaux de tailles différentes, là des scies, là-bas des rabots; on apprend à l'étudiant l'usage de chaque instrument, mais on les met rarement ensemble pour construire un objet qui en vaut vraiment la peine" [4]. Mais remarquons qu'il faut que les élèves, parmi ces objets qui en valent vraiment la peine, construisent aussi ... les outils qui sont nécessaires.

### 5. Pertinence des activités mathématiques

Comme indiqué plus haut, les situations paradoxales ont fait naître un climat d'autonomie : il s'agit non seulement de faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'une autonomie, mais aussi de l'instaurer en classe : sans cela, les élèves n'auraient pas pu produire eux-mêmes toute cette richesse d'"attaques" (algébrique, géométrique, ...) et de traitements. Ils n'auraient pas eu l'occasion de conceptualiser eux-mêmes l'exagération des diagrammes "en aires", d'imaginer les encadrements et quadrillages des bonshommes.

La pluralité des méthodes engendrées par cette autonomie provoque la discussion de l'efficacité et de la performance de celles-ci : faut-il résoudre une équation du second degré ou se ramener à une équation du premier degré ? Faut-il adopter un point de vue "soustractif" ou un point de vue "divisif" ?

Dans ce type d'activités, un point important est d'organiser des passages où la formulation est nécessaire (dans l'activité 2, la question 5, et dans l'activité 3, la question 3). Un piège à éviter par l'enseignant est de se limiter à des questions de *vérification* plus ou moins astucieuses (par exemple, du type de l'activité 1) : mesurer ceci, mesurer cela, ... Pour les questions mentionnées plus haut, il est nécessaire de considérer une classe de diagrammes (activité 2) ou d'établir le lien commun entre deux classes de nombres (activité 3). Ces situations, contrairement à la vérification, s'apparentent à la *démonstration*. "La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile

---

parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses" [5].

Enfin, l'élaboration de connaissances et la conviction vont de pair : à ce propos, il est aussi important de s'être rendu compte, au cours de tâtonnements, de ce que la solution, ou le concept (d'exagération p.e.) *ne sont pas* pour les cerner et aussi pour pouvoir défendre sa propre élaboration ou sa propre conceptualisation.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Collège de France, *Propositions pour l'enseignement de l'avenir*, Paris, 1985.
- [2] HILTON P.J., *Le langage des catégories*, CEDIC, Paris, 1973.
- [3] BIRKHOFF G., BEATLEY R., *Basic Geometry*, Chelsea, New-York, 1959.
- [4] LAX P., BURSTEIN S., LAX A., *Calculus with Applications and Computing*, vol. I, Springer, New-York, 1976.
- [5] POINCARÉ H., *La science et l'hypothèse*, réed. Flammarion, Paris, 1968.

Pour recevoir les publications du GEM, adressez vos commandes par lettre au Groupe d'Enseignement Mathématique, 2 chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgique). Elles vous seront expédiées accompagnées d'une facture et d'instructions pour le paiement. Chaque facture sera majorée de 20 FB + 10 FB par brochure supplémentaire pour la Belgique et de 30 FB + 10 FB par brochure supplémentaire pour l'étranger (frais de port et d'expédition).

Décembre 1985

100 FB

Copyright © 1985 by GEM, Louvain-la-Neuve.

Toute reproduction à l'usage direct des classes est autorisée.

Dépôt légal : D/1985/3599/8

---

sous le titre général

PROPOSITIONS

le GEM diffuse des textes divers à l'intention des professeurs de mathématiques des écoles secondaires. Ces textes sont des documents de travail préparés pour être discutés, améliorés, complétés. Les lecteurs sont cordialement invités à envoyer leurs critiques et commentaires au GEM, chemin du Cyclotron, 2 à 1348 Louvain-la-Neuve.

## PUBLICATIONS DU G.E.M.

### DOSSIERS

- 1) *UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE A L'ECOLE PROFESSIONNELLE*, 1979, 22 pages, 40 FB.  
Apprendre à localiser, repérer, situer.
- 2) *UNE GEOMETRIE POUR TOUS LES JOURS (Axiomatique et enseignement de la géométrie)*, troisième édition, 1985, 60 pages, 130 FB.  
Pourquoi enseigner la géométrie à partir de situations ouvertes ?
- 3) *L'ARCHIPEL DES ISOMETRIES, essai de redécouverte*, 1982, 288 pages, 480 FB.  
Livre destiné aux professeurs, mais contenant des fiches de travail pour les élèves. Archipel formé d'îlots construits avec les élèves. La relation des mathématiques au quotidien et les étapes de la construction d'un savoir mathématique.

### PROPOSITIONS

- 2) *RENCONTRES AVEC L'INFINI*, 1981, 44 pages, 100 FB.  
Quatorze problèmes de difficulté croissante sur les suites et les séries.
- 3) *L'OUTIL VECTORIEL*, 1981, 21 pages, 60 FB.  
Cet outil est créé sur des chantiers de démonstration de théorèmes sur les transformations planes.
- 4) *LES FONCTIONS, C'EST AUSSI AUTRE CHOSE*, 1981, 44 pages, 100 FB.  
Une fonction, c'est bien plus qu'un ensemble de couples. Contient beaucoup de matériaux pour enseigner concrètement les fonctions.
- 5) *FOUETTER UN CHAT AVEC UNE DROITE*, 1981, 24 pages, 75 FB.  
Le concept de droite ne va pas de soi : du fil tendu à la droite axiomatique.
- 7) *ACTIVITES GEOMETRIQUES POUR LES ECOLES PROFESSIONNELLES ET LES AUTRES*, 1982, 63 pages, 150 FB.  
Représentation en plan d'objets de l'espace pour communiquer des formes et des dimensions.
- 8) *ECRIRE DES MATHEMATIQUES*, 1983, 24 pages, 100 FB.  
Ou l'art de présenter les mathématiques par écrit avec des figures évocatrices.
- 9) *DES ELEVES RESPONSABLES, C'EST POSSIBLE*, 1984, 10 pages, 40 FB.  
Une enseignante explique comment, depuis des années, elle a mis la bride sur le cou des élèves, ce qui les a fait galoper dans la matière.
- 10) *MESURES, PAVAGES ET NOMBRES IRRATIONNELS*, 1985, 52 pages, 100 FB.  
Les nombres irrationnels découverts dans un contexte géométrique et historique.

### HORS-SERIE

*CONTREMANUEL DE STATISTIQUE ET PROBABILITE*, N. ROUCHE, M. MANDERICK, M. PELTIER, 1982, 200 pages, 530 FB.

Initiation théorique introduite par des exemples multiples et socialement importants.

*LA GEOMETRIE SUR LE TERRAIN DES ELEVES*, Actes du colloque inter-IREM de géométrie à Louvain-la-Neuve, mai 1983, 163 pages, 1984, 250 FB.

Une douzaine d'expériences d'enseignement de la géométrie dans diverses classes du secondaire en France et en Belgique.

*LES TRANSFORMATIONS AFFINES DU PLAN ETUDIEES A L'AIDE D'APPAREILS ARTICULES*, 1982, 60 pages, 100 FB.

Sept fiches de travail avec synthèse destinées aux élèves, pour découvrir les transformations affines planes.