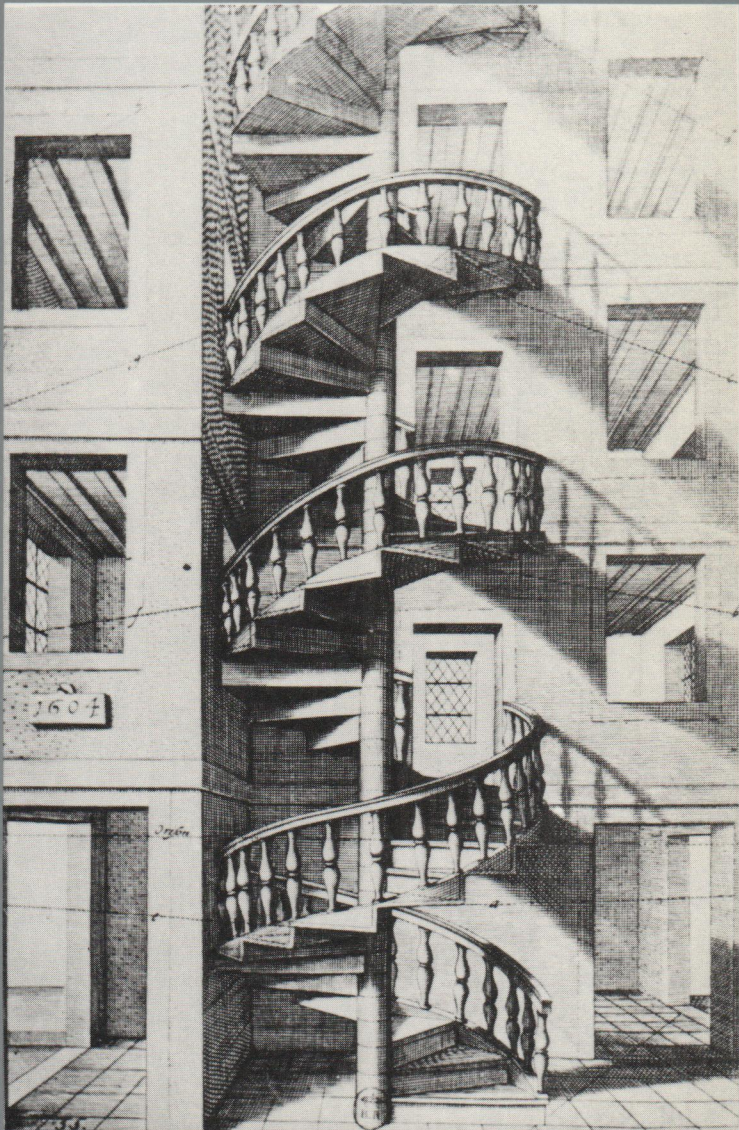


proposition 12

# la perspective en questions

thérèse gilbert



gem

ciaco éditeur



propositions 12

# la perspective en questions

thérèse gilbert



gem

ciaco éditeur



La gravure de couverture est extraite de Jan Vredeman de Vries,  
Perspectives, id est Celeberrima ars ..., Leyde, 1604-1605, Bibl. Nat.  
Paris.

## TABLE DES MATIERES

PREFACE		IX
Chapitre 1	UNE PREMIERE IDEE DE LA PERSPECTIVE	1
1.	Qu'est-ce qui cloche ?	1
2.	Les portillons de Dürer.	9
3.	La maison sur la vitre.	13
Chapitre 2	POINTS DE FUITE	14
1.	Ombres à la lampe.	14
2.	Dessins de routes.	20
3.	Représentation de droites qui ne sont pas sur le sol.	26
4.	Points de fuite dans les peintures.	28
5.	Droites en tout genre.	32
6.	Extension à la projection centrale.	38
Chapitre 3	DIVISER EN PARTIES EGALES	43
1.	Une route bordée d'arbres.	43
2.	Carrelages.	62

## VI

Chapitre 4	OMBRES ET REFLETS EN PERSPECTIVE	80
1.	Ombres au soleil.	81
2.	Ombres à la lampe.	90
3.	Miroirs et ombres à la lampe.	94
Chapitre 5	LIRE UNE VUE EN PERSPECTIVE	101
1.	Le tuyau inaccessible.	101
2.	Reconstitution de scènes peintes.	102
3.	Dessin d'un architecte.	108
4.	Perspective et photographie.	110
Chapitre 6	COURBES, POLYEDRES, ETC.	115
1.	Représentation de courbes.	115
2.	Autres dessins.	127
3.	Le perspectographe.	131
Chapitre 7	VISION ET PERSPECTIVE	135
1.	Comment voyez-vous ça ?	135
2.	Illusions d'optique, trompe-l'oeil et anamorphoses.	160
3.	La perspective dans la publicité.	172
APPENDICES		174
1.	Le théorème de Pythagore.	174
2.	Le segment capable de $90^\circ$ .	174
3.	Le théorème de Thalès.	175

## VII

4. Homothéties et triangles semblables.	176
5. Suites géométriques.	178
6. Projections parallèles.	179
BIBLIOGRAPHIE	183
INDEX	186
SOURCES DES ILLUSTRATIONS	188

## PREFACE

Ce livre s'adresse à toute personne intéressée par la perspective et ne suppose aucune connaissance préalable (sauf au Chap. 6). Par contre, pour le lire avec profit, il faut aimer réfléchir, ne pas craindre de se battre avec des problèmes, préférer trouver soi-même que recevoir du tout cuit.

Chaque chapitre se présente comme une suite de questions. Essayez d'y répondre, vous y arriverez le plus souvent. Et surtout, ne vous précipitez pas sur les réponses : ce serait une façon d'apprendre dix fois moins profonde.

De problème en problème, vous serez conduit de votre savoir quotidien jusqu'à des questions difficiles mais stimulantes. Du moins est-ce là ce que nous avons tenté de réaliser. Au passage, vous apprendrez les notions de mathématiques nécessaires ou utiles, essentiellement des questions de géométrie de l'espace. Nous ne les avons introduites que lorsqu'elles servent à résoudre les problèmes. Et donc vous ne vous demanderez pas, comme souvent dans les cours de mathématiques : "à quoi ça sert ?". Sauf exception ou raté toujours possible de notre part, vous le verrez tout de suite. Les mathématiques évoquées - avec la juste dose de rigueur - servent, répétons-le, à répondre aux questions posées.

Mettons bien les choses au point. Dans l'exposé qui suit, nous ne fuyons pas les mathématiques. Nous ne vous donnons pas

des trucs pour dessiner en perspective, quitte à ce que vous ne compreniez pas très bien d'où ils viennent. Notre idée et notre espoir est que vous vous disiez à la fin : "et bien, c'est passionnant de comprendre la perspective en profondeur, et d'arriver à résoudre des problèmes apparemment pas piqués des vers!"

Si vous enseignez la géométrie de l'espace et si cela vous chagrine de n'avoir à offrir à vos élèves que des points, des droites et des plans, objets aux formes si peu excitantes, alors peut-être trouverez-vous ici des situations-problèmes susceptibles d'animer votre classe. Pourquoi ne pas essayer de défier les adolescents avec des questions à leur mesure, pas trop molles, pas trop dures non plus, où chacun exerce sa force intellectuelle et son agressivité de chercheur. Pourquoi ne pas tenter de mettre un tigre dans chaque élève ?

N. Rouche.

M'ont aidée dans l'élaboration, la rédaction et la production finale de ce texte : Marc Annoye, Carine Deneufbourg, Catherine Franc, Cécile Goossens, Marisa Grand'Henry, Christiane Hauchart, Benoît Jadin et sa classe de 6ème (Collège épiscopal du Sartay, Embourg), Dany Legrand, Marie-France Loutre, Sylvie Rouche, Xavier Vanandruel et ses classes de maths spéciales (Collège Saint-Michel, Bruxelles) et surtout Nicolas Rouche. D'autres personnes m'ont soutenue et encouragée dans ce travail. Merci à tous.

Th. G.



## CHAPITRE 1

### UNE PREMIERE IDEE DE LA PERSPECTIVE

#### 1. QU'EST-CE QUI CLOCHE ?

Comment imaginez-vous le temple de la Fig. 1 ? Et celui de la Fig. 2 ? Les auriez-vous représentés ainsi ?



Fig. 1

*Le Temple de Salomon de Nicolas de Lyre, XIVe siècle.*

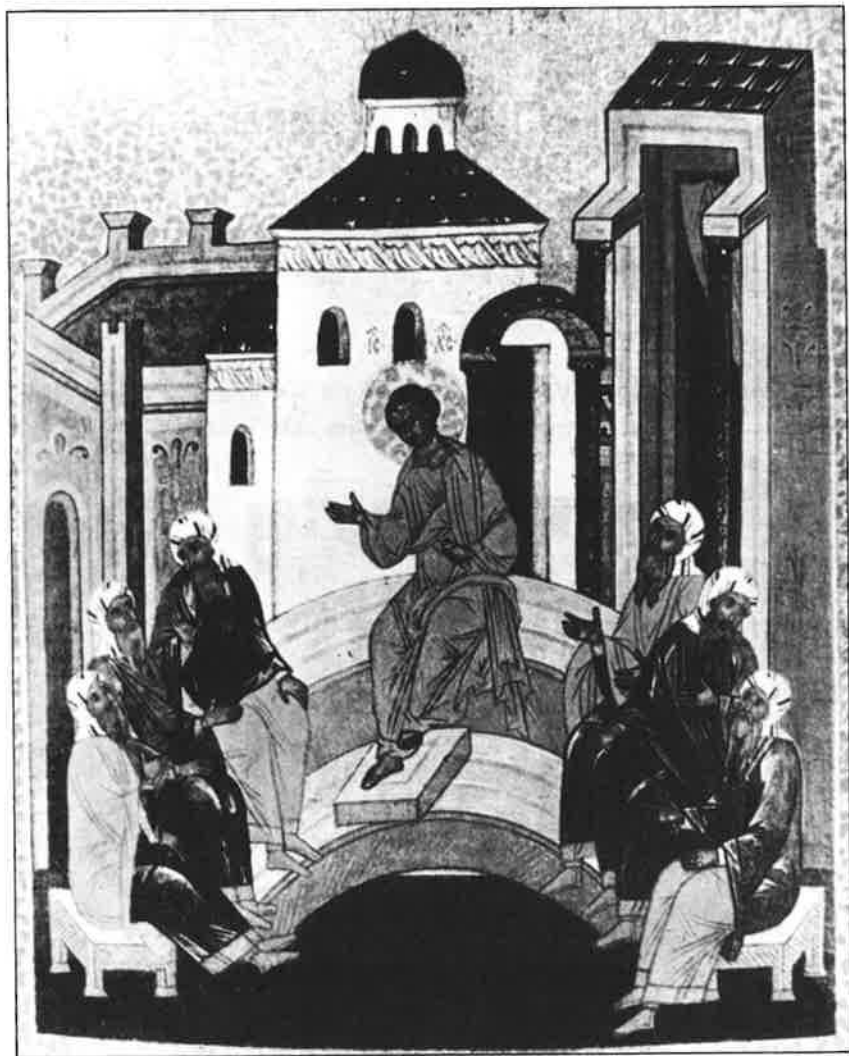


Fig. 2  
*Jésus dans le temple*, Novgorod, début du XVe siècle,  
collection Voldemar Wehrlin.

Solution.

Vous trouverez peut-être que ces deux tableaux sont très bien comme ils sont. Dans ce cas, passez aux questions suivantes. Il se peut aussi que, même si vous ne connaissez rien à la perspective, vous ayez envie de changer certains éléments des deux peintures. Essayez alors de préciser ces changements et de les justifier, car c'est là tout le sens de la réflexion proposée.

Il n'y a pas de réponse type à des questions aussi ouvertes : chacun suivra à son gré le fil de ses observations. Voici les nôtres. Nous les avons émaillées de nouvelles questions. Néanmoins, nous invitons le lecteur à ne répondre à la dernière question sur la Fig. 1 qu'après avoir appris quelques notions de perspective, par exemple au cours des Chapitres 1 et 2.

A propos du Temple de Salomon.

Commençons par désigner par une lettre quelques-unes des faces et des arêtes du temple (Fig. 3).

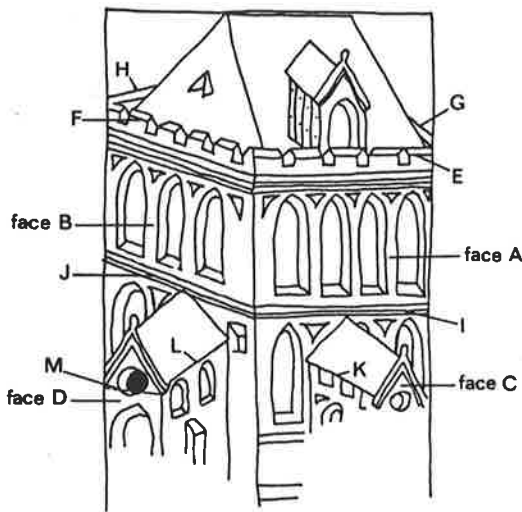


Fig. 3

Dessinez, comme vous l'imaginez, le temple vu du dessus, puis de côté (face A) et enfin d'un autre côté (face B).

Les Fig. 4, 5 et 6 montrent notre interprétation.

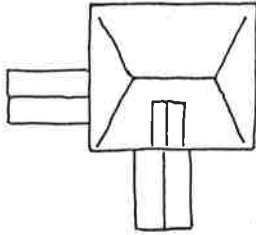


Fig. 4

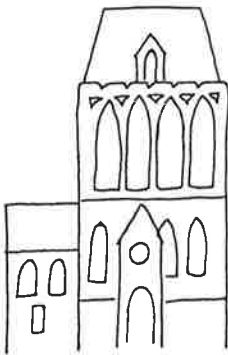


Fig. 5

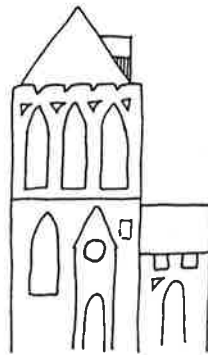


Fig. 6

*Comment la mansarde est-elle attachée au toit ?*

La peinture donne l'impression qu'elle ne tient au toit que par une arête, comme à la Fig. 7, ce qui est peu vraisemblable ! La situation de la Fig. 6 est plus réaliste et nous conduit à la représenter comme à la Fig. 8.

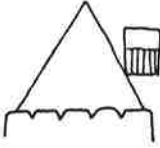


Fig. 7

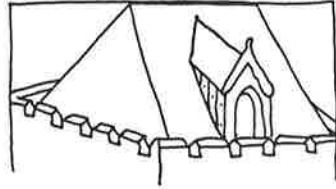


Fig. 8

*La base du temple vous paraît-elle rectangulaire ?*

Les arêtes E, F, H, G ne semblent pas déterminer un rectangle : F et G paraissent diverger vers l'arrière et de même E et H vers la droite.

*Auriez-vous représenté de la même façon que Nicolas de Lyre les lignes que l'on suppose parallèles, par exemple*

- les arêtes I, L,
- les arêtes J, K ?

On imagine l'avancée comprenant l'arête L perpendiculaire à la face B et celle-ci perpendiculaire à la face A comme à la Fig. 4. Dans ce cas, les arêtes I, L que l'on suppose horizontales seraient parallèles. Dans le tableau, pourtant, l'arête L ne semble pas parallèle à I.

La Fig. 9 montre une autre position de l'avancée par rapport au bâtiment. Celle-ci, quoique peu probable, serait plus en accord avec sa représentation dans le tableau.

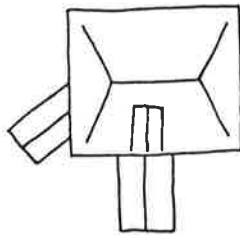


Fig. 9

Les arêtes J et K sont dessinées plus ou moins parallèles et cela semble plus naturel.

*Quelle position la face D de l'avancée a-t-elle par rapport à l'ensemble du bâtiment ? L'auriez-vous représentée de la même façon que Nicolas de Lyre ?*

De nouveau, dans la réalité, on imagine la face D parallèle à la face B. Par contre, dans le tableau, la face D paraît frontale (on a l'impression de la voir de face et pas de côté) : la fenêtre circulaire est représentée par un cercle et la base M du pignon est à peu près horizontale<sup>1</sup>. Nous l'aurions plutôt représentée comme à la Fig. 10.

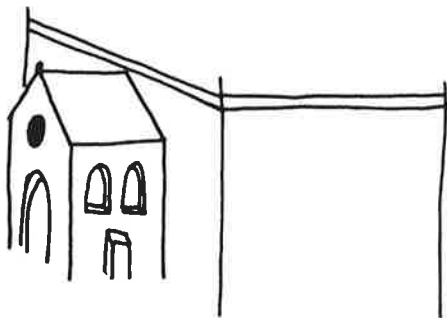


Fig. 10

*Si<sup>2</sup> l'on ne tient pas compte des fenêtres, la face A paraît frontale : les arêtes horizontales sont représentées par des horizontales. Par contre, les fenêtres et la face B donnent l'impression que le temple est vu de la gauche. Y a-t-il des modes de représentation qui permettent cela ?*

---

<sup>1</sup> Nous convenons d'appeler *horizontales* les droites parallèles au bord inférieur de la page.

<sup>2</sup> Rappel : si vous n'avez aucune idée de la perspective, sautez cette question en première lecture.

A priori, on a l'impression que si cette face du bâtiment est frontale, celui-ci ne peut pas être vu "de côté". On voit pourtant sur les Fig. 11 et 12, représentant le temple en vue du dessus, qu'il existe des modes de représentation (en *perspective centrale* à la Fig. 11, en *perspective parallèle*<sup>3</sup> à la Fig. 12) présentant la face A de manière frontale tout en laissant apparaître la face B et en montrant les fenêtres de côté.

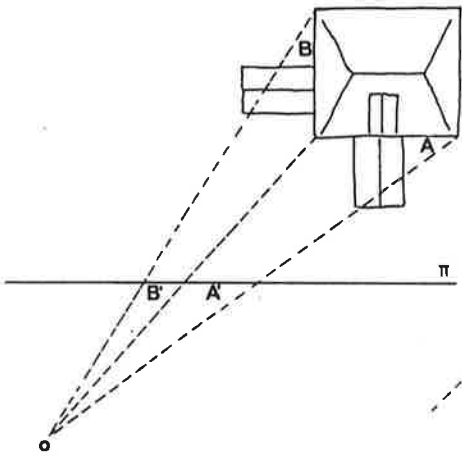


Fig. 11

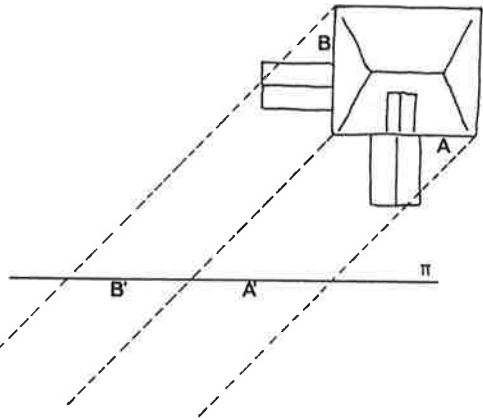


Fig. 12

(Dans les Fig. 11 et 12 comme tout au long de ce livre,  $\pi$  désigne le plan de projection et  $o$ , le centre de projection. Nous réservons la lettre D pour désigner la distance du centre au plan de projection).

<sup>3</sup> Cf l'Appendice 6, une présentation sommaire de cette perspective.

A propos de Jésus dans le temple.

*Faites un plan des bâtiments et des personnages du tableau.*

Contrairement au tableau de Nicolas de Lyre où l'on pouvait deviner la forme du temple à quelques imprécisions près, le tableau de la Fig. 2 est difficile à interpréter : on imagine mal la forme, la place et la grandeur des bâtiments. Les personnages sont-ils assis sur un pont (alors comment sont-ils assis ?) ou sur des gradins circulaires (mais on voit le bas du bâtiment blanc en dessous de la place que Jésus occupe) ou sur autre chose ? Le bâtiment blanc se trouve-t-il plus vers l'arrière que le bâtiment de droite ? Il est en tous cas devant les fortifications, mais y est-il attaché ou est-il loin devant elles ? Plusieurs solutions à ces questions sont possibles et aucun argument ne permet d'affirmer que l'une est meilleure que l'autre. Dans ce cas, il est impossible de faire un plan des bâtiments.

*Où placeriez-vous le peintre par rapport à la scène ?*

Jésus est vu de la droite, mais, d'après la position des autres personnages sur le tableau, on imaginerait plutôt le peintre en face de Jésus. Les fenêtres du bâtiment blanc sont vues de la gauche et du dessous, le bâtiment de droite est vu de la droite et les fortifications, du dessus. Le tabouret de droite est vu de la droite et celui de gauche, de la gauche (remarquons qu'ils n'ont ni l'un ni l'autre les quatre pieds de même grandeur). Le mur de gauche des fortifications est spécialement bizarre. Il est vu du dessus et de la droite, alors que la porte est vue du dessous et de la gauche et que la décoration au-dessus de la porte est vue de front.



## 2. LES PORTILLONS DE DÜRER.

Dessinez exactement, sur une fenêtre, le paysage que vous voyez au travers.

Expliquez les procédés utilisés par le peintre sur les Fig. 13 et 14. Dans quelle partie de l'espace un objet doit-il se situer pour pouvoir être dessiné sur la vitre par le procédé de la Fig. 13 ?

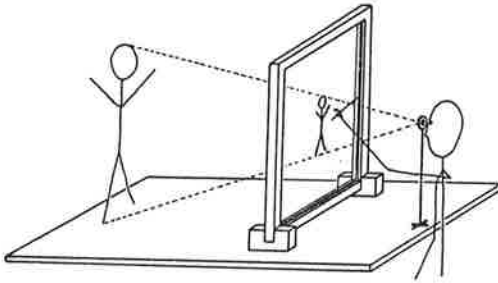


Fig. 13



Fig. 14

Dessin d'une femme en raccourci de Albrecht Dürer; gravure sur bois, tirée de *Underweysung der Messung*, Nürnberg, 1536.

Solution.

Pour dessiner sur une fenêtre, il est nécessaire de fermer un oeil et de laisser l'autre fixe. On peut alors facilement dessiner le paysage en s'arrangeant pour que, de l'endroit où l'on s'est placé, le dessin se superpose à la réalité.

C'est ce procédé qui est utilisé dans les Fig. 13 et 14. Dans la Fig. 13, l'oeil reste fixe grâce à un oeilleton par lequel le peintre regarde et dans la Fig. 14, grâce à la tige verticale en forme d'obélisque.

Dans la Fig. 13, les traits en pointillé allant du petit bonhomme à l'oeilletteon représentent deux des rayons lumineux grâce auxquels on voit le personnage quand on regarde par l'oeilletteon. Si on se place à cet endroit, le dessin du bonhomme sur la vitre sera perçu de la même façon que le bonhomme lui-même, puisque chaque point du dessin occupera la même place dans le champ visuel que le point du personnage qu'il représente.

Si on appelle  $o$  le point de l'espace où l'oeil se situe, l'image d'un point  $a$  sur la vitre-tableau sera donc le point  $a'$  d'intersection de la vitre et de la demi-droite  $[oa$ . Le point  $o$  sera appelé le *point de vue* du tableau.

Pour avoir une image sur la vitre-tableau, un objet doit se situer dans la pyramide de sommet  $o$  et dont les arêtes passent par les coins du tableau.

Ce procédé est aussi représenté sur une gravure de Dürer dans son traité de 1525 (1ère éd. de *Underweysung der Messung*). Léonard de Vinci (1452-1519), avant Dürer, avait déjà décrit ce procédé, mais c'est Alberti, dans *Della Pittura* en 1436, qui fut le premier à donner la "définition du plan pictural comme intersection de la pyramide formée par les rayons visuels, ayant pour sommet l'oeil de l'observateur et pour base l'objet à représenter<sup>4</sup>".

---

<sup>4</sup> Cité par Marisa Dalai Emiliani dans la préface de E. Panofsky (1975).

Dans la Fig. 14, le peintre utilise un cadre divisé en carrés par un réseau de fils noirs et transpose ce qu'il voit à travers le cadre sur une feuille quadrillée de la même façon.

Ces *portillons de Dürer* ne sont pas difficiles à réaliser (Fig. 15) et peuvent être très utiles pour la compréhension de la perspective car ils permettent d'en observer les premières lois.

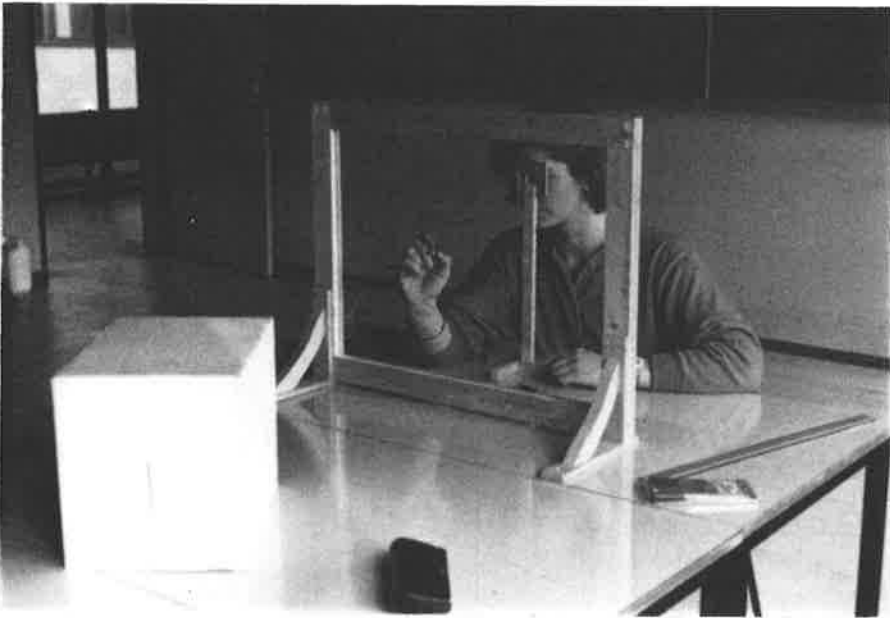


Fig. 15

Si nous élargissons notre vitre-tableau en un plan  $\pi$ , tous les points du demi-espace délimité par le plan  $\pi$ , parallèle à  $\pi$ , passant par  $o$  ( $\pi_0$  n'étant pas compris dans le demi-espace) ont une image sur le plan  $\pi$ . Nous définirons la *perspective centrale* de centre  $o$  et de plan  $\pi$  comme l'application envoyant chaque point de ce demi-espace sur le point de percée de la demi-droite  $[oa$  dans le plan  $\pi$ .

Si on remplace, dans cette définition, les termes "demi-droite  $[oa$ " par "droite  $oa$ ", tous les points de l'espace excepté ceux du plan  $\pi_0$  ont une image sur le plan  $\pi$ . Nous réserverons le terme de *projection centrale* de centre  $o$  et de plan  $\pi$  à l'application envoyant chaque point  $a$  de l'espace (moins le plan  $\pi_0$ ) sur le point de percée de la droite  $oa$  dans le plan  $\pi$  (Fig. 16). Nous appellerons aussi cette application la *projection centrale complète* pour bien la distinguer de la perspective centrale. En fait, le terme de *perspective* est utilisé quand cette projection sert à la représentation. Le concept de projection est plus général.

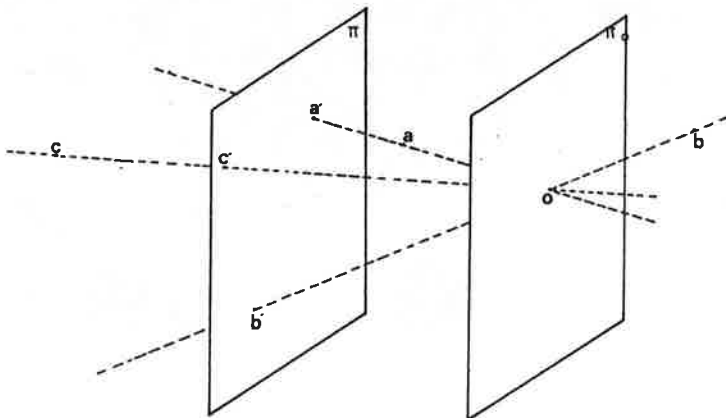


Fig. 16

3. LA MAISON SUR LA VITRE.

Dessinez sur une vitre le contour d'une maison que vous voyez au loin, face à la fenêtre, puis reculez d'un mètre. Voyez-vous la maison plus petite ou plus grande que le contour dessiné ? Essayez de deviner le résultat de l'expérience avant de la faire.

(Sans solution.)

## CHAPITRE 2

### POINTS DE FUITE

#### 1. OMBRES A LA LAMPE

##### Ombre d'une barrière

Construisez une petite barrière et posez-la verticalement sur une grande feuille de papier. Fixez près d'elle une lampe de poche<sup>5</sup> éteinte comme sur la Fig. 17 et dessinez l'ombre de la barrière comme vous pensez qu'elle apparaîtra lorsque vous allumerez la lampe.

Vérifiez vos prévisions en allumant la lampe. Expliquez vos erreurs éventuelles.

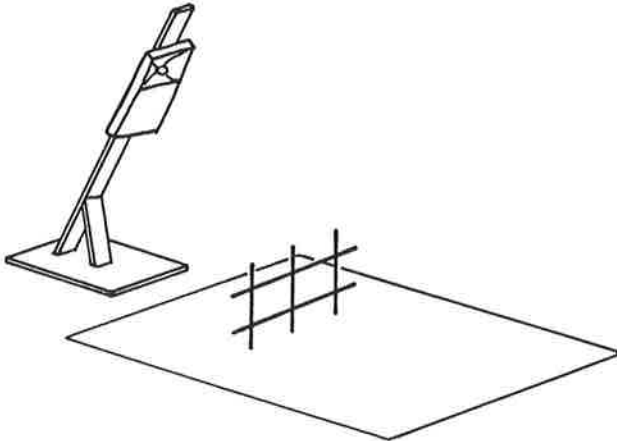


Fig. 17

<sup>5</sup> Pour avoir une source de lumière ponctuelle, utilisez l'ampoule de la lampe de poche sans le miroir ni la glace.

Où est l'ombre ?

Dessinez les ombres des barrières ci-dessous. Si ce n'est pas possible, pourquoi ? Dans les Fig. 18, 19, 20, le lampadaire et la barrière sont posés sur un plan horizontal.

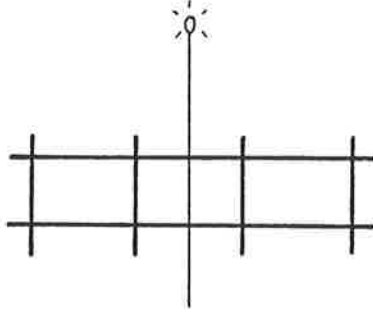


Fig. 18  
Tout est bien vertical.

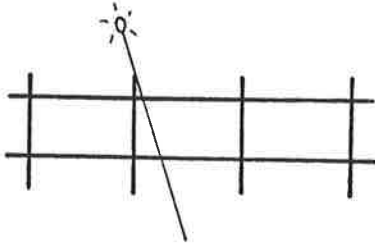


Fig. 19  
Le lampadaire est penché.

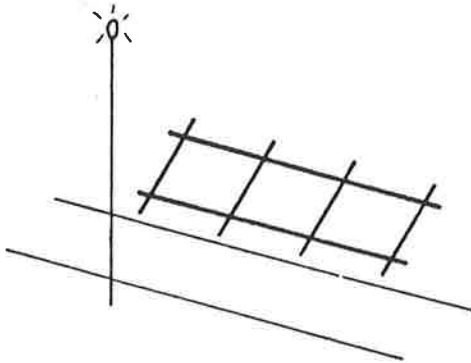


Fig. 20  
La barrière est penchée.

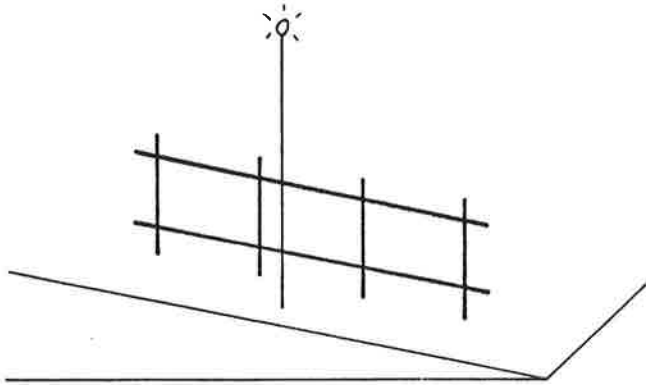


Fig. 21

Le lampadaire et la barrière sont dans une rue en pente mais sont verticaux.

Pistes pour les cas des Fig. 19, 20 et 21 . Justifiez la construction faite à la Fig. 18 et appliquez-la à la Fig. 19. Sur celle-ci, où se situe le pied de la perpendiculaire passant par la lampe ? Appliquez le même raisonnement aux cas des Fig. 20 et 21 pour construire, si possible, le point de rencontre du prolongement des ombres des piquets verticaux.

Où est la lampe ?

Dessinez la lampe qui a donné l'ombre de la Fig. 22.

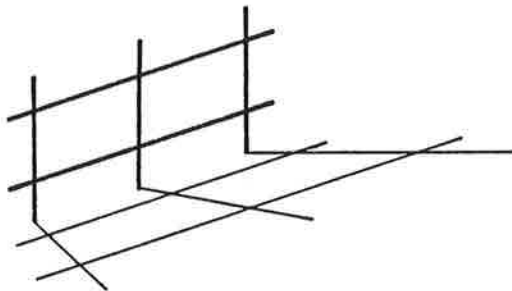


Fig. 22



Ombre d'une barrière. Solution.

L'ombre de chaque point de la barrière se trouve à l'intersection de la feuille et du rayon lumineux passant par ce point<sup>6</sup>. Ce rayon lumineux peut être concrétisé par une ficelle tendue partant de la lampe. Pour tracer l'ombre de la barrière, il suffit de trouver l'ombre de quelques points particuliers.

L'ombre d'un objet dans la lumière d'une lampe ponctuelle résulte donc d'une projection centrale comme celle que nous avons rencontrée au Chap. 1.

Où est l'ombre ? Solution.

Examinons la Fig. 18. L'ombre d'un piquet vertical commence à la base du piquet. Pour savoir où elle se termine, nous traçons le rayon lumineux émanant de la lampe et passant par le sommet du piquet. Nous trouvons son point d'intersection avec le sol en traçant la droite passant par le pied du lampadaire et celui du piquet (Fig. 23). L'intersection de cette droite et du rayon lumineux est l'endroit où se termine l'ombre du piquet.

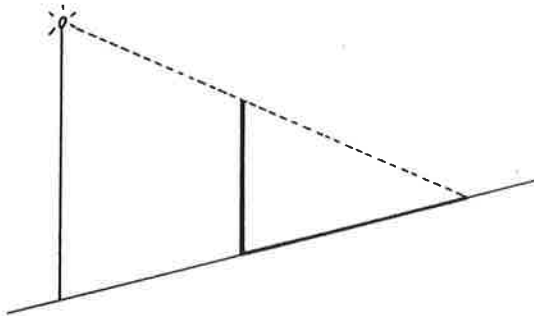


Fig. 23

En effet, les rayons émanant de la lampe et rencontrant le piquet constituent une portion de plan. C'est l'intersection de cette portion de plan et du sol qui détermine l'ombre.

<sup>6</sup> En fait, les rayons lumineux dont on parle ici ne passent pas par les points de la barrière mais sont justement arrêtés par ceux-ci et dès lors produisent de l'ombre.

Or ce plan comprend le lampadaire (puisque tout plan contenant un point  $o$  (la lampe) et une droite  $E$  (le piquet) contient également la droite parallèle à  $E$  passant par  $o$  (le lampadaire)). L'intersection de ce plan et du plan du sol passe donc par le pied du lampadaire.

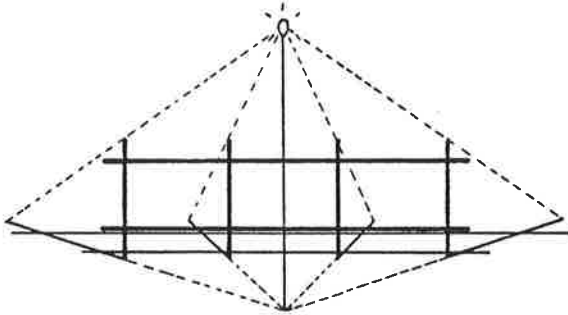


Fig. 24

Pour tracer l'ombre d'un piquet, dans le cas de la Fig. 19, cherchons la droite d'intersection du plan du sol et du plan déterminé par la lampe et ce piquet. Elle passe par le pied du piquet mais plus par celui du lampadaire. En effet, celui-ci n'est pas parallèle au piquet.

Il faudrait plutôt trouver le pied (sur le sol) de la droite parallèle au piquet et passant par la lampe. Mais nous ne connaissons pas exactement la façon dont le lampadaire est penché : il est, en tout cas, penché vers la gauche mais il pourrait l'être aussi vers l'avant ou l'arrière. Nous ne pouvons donc pas résoudre le problème.

Dans le cas de la Fig. 20, le problème est insoluble : ne sachant pas exactement de quelle façon la barrière est penchée, nous ne pouvons pas trouver le pied (sur le sol) de la droite parallèle aux piquets et passant par la lampe.

Dans le cas de la Fig. 21, le lampadaire et les piquets de la barrière sont parallèles. Nous pouvons donc faire la même construction que pour la Fig. 18.

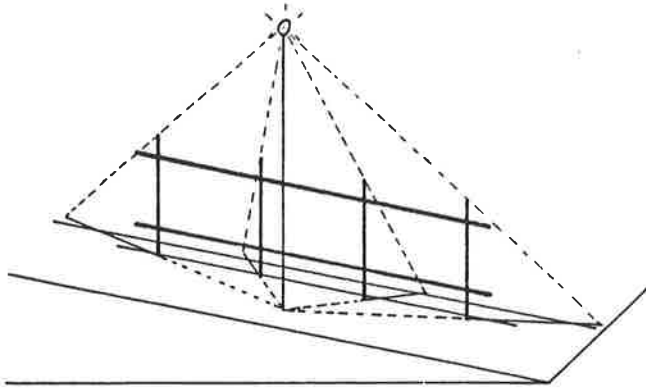


Fig. 25

Où est la lampe ? Solution.

On trouve la position de la lampe de la Fig. 22 en reconstituant les rayons lumineux qui ont provoqué les ombres. Pour cela, on trace les droites joignant le sommet de chaque piquet avec l'extrémité de son ombre (Fig. 26).

Si le poteau est vertical, son pied se trouve sur les prolongements des ombres des piquets verticaux, comme nous l'avons vu au problème de la Fig. 18.

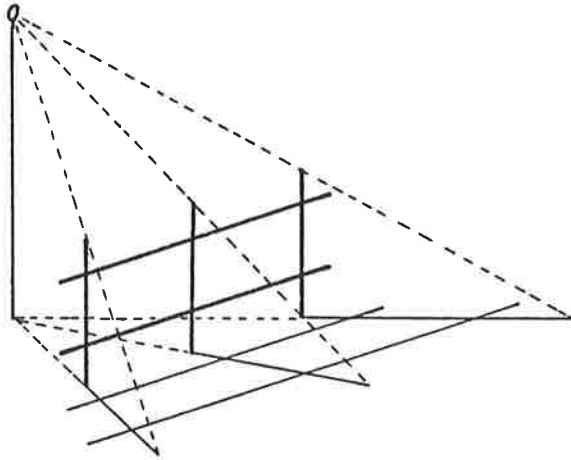


Fig. 26

2. DESSINS DE ROUTES

Une route horizontale

Comment ce peintre va-t-il dessiner la route sur sa "vitre-tableau" ? Complétez les deux tableaux (Fig. 27 et 28). (D est la distance de l'oeil au tableau et p la projection orthogonale de l'oeil sur le tableau).

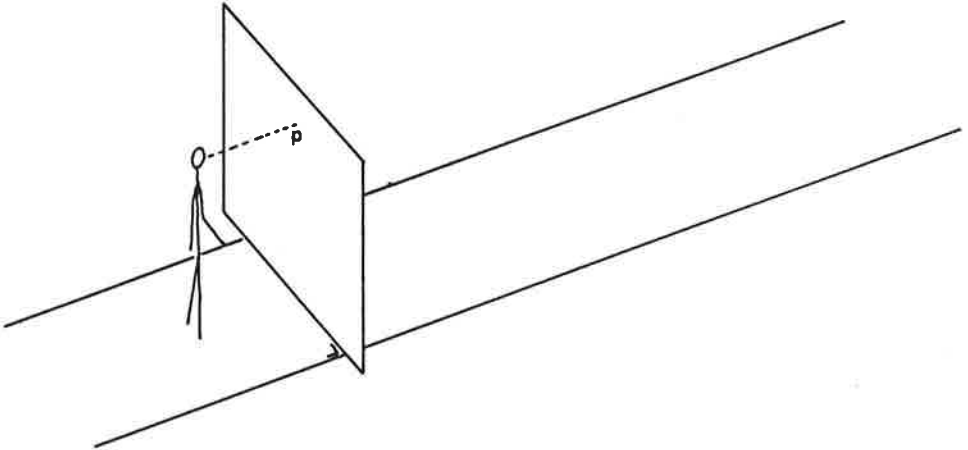


Fig. 27

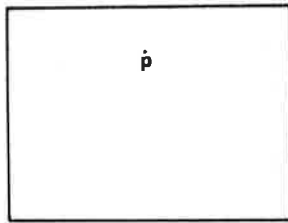


Fig. 28

Une route montante

Dessinez sur la "vitre-tableau" (Fig. 29 et 30) l'image de la route qui, cette fois, monte avec une pente de  $20^\circ$ .

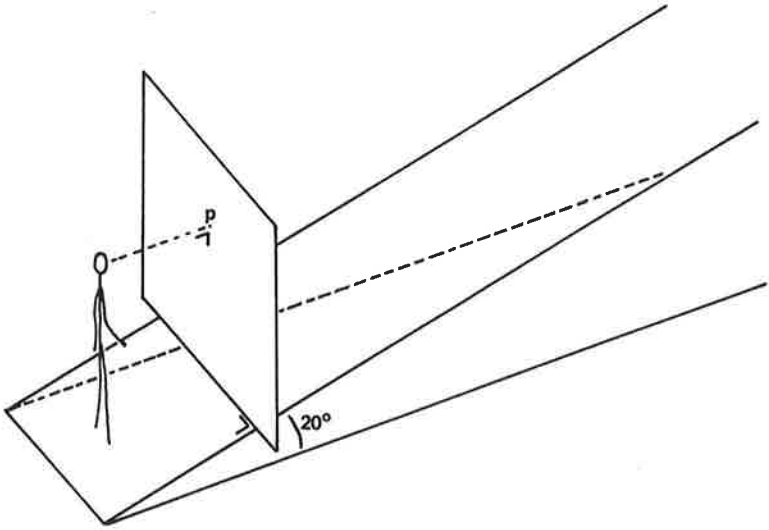


Fig. 29

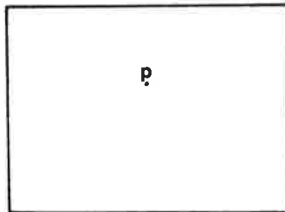


Fig. 30

Une route horizontale. Solution.

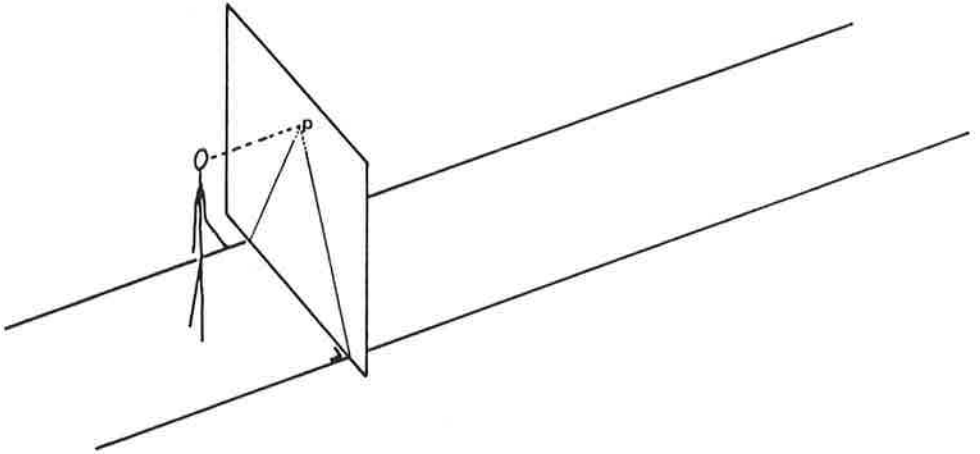


Fig. 31

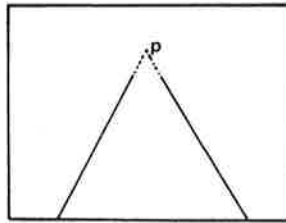


Fig. 32

Recherche intuitive. Supposons que le peintre suive des yeux une souris qui longe le bord droit de la route en partant du tableau et en s'éloignant de lui (Fig. 33). Pour la voir au départ, le peintre doit baisser la tête et l'image de la souris est, à ce moment là, au bas du tableau, à droite. Mais au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de lui, il doit relever la tête et la direction de son regard se rapproche de plus en plus de la parallèle à la route. Quand la souris sera

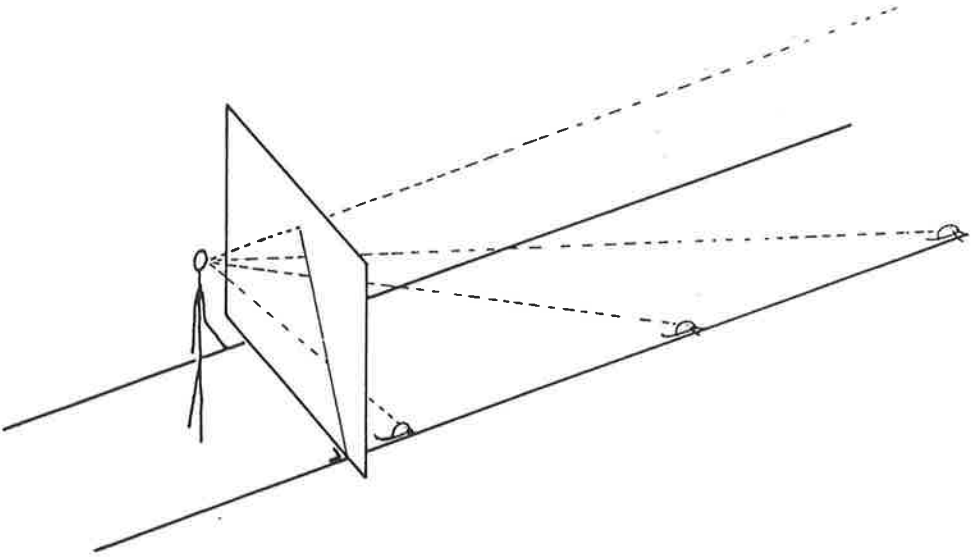


Fig. 33

"à l'infini"<sup>7</sup>, le regard du peintre aura une direction tout à fait parallèle à la route. L'image de la souris, à ce moment-là, sera au point d'intersection du tableau et de la parallèle à la route passant par l'oeil. Ce point, dans ce cas-ci, est p.

Nous pouvons voir, en faisant le même raisonnement, que l'image du bord gauche de la route s'arrête également au point p. Ce point sera appelé *point de fuite* de la route. Comme celle-ci est perpendiculaire au tableau, on appellera ce point de fuite, le *point principal* du tableau.

Recherche plus rigoureuse. Considérons le plan  $\pi$  du tableau, le point o représentant l'oeil du peintre et la droite E, bord droit de la route.

Les demi-droites issues de o s'appuyant sur la droite E forment un demi-plan. Notons-le  $\overline{\pi_1}$  et notons  $\pi_1$  le plan (entier) le comprenant (Fig. 34).

---

<sup>7</sup> Nous donnerons une définition rigoureuse de *point à l'infini* d'une droite à la section 6. Pour l'instant, il suffit de donner à cette expression le sens de *très très loin sur la route*.

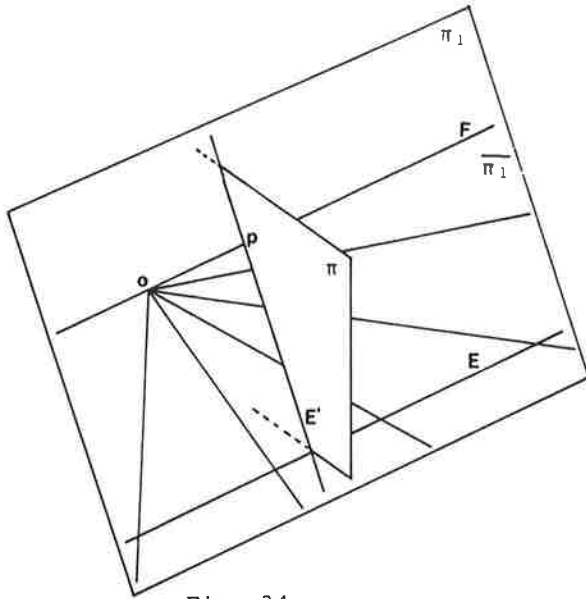


Fig. 34

Le plan  $\pi_1$  comprend avec  $E$  la droite  $F$ , parallèle à  $E$  passant par  $o$ . Cette droite est le bord du demi-plan  $\overline{\pi_1}$  et elle coupe  $\pi$  au point  $p$ . La projection de  $E$  sur  $\pi$  est la demi-droite  $E'$  d'intersection de  $\overline{\pi_1}$  et de  $\pi$  et aboutit au point  $p$ .

Il faut néanmoins remarquer que ce point  $p$  n'est l'image d'aucun point de  $E$ . En effet, la demi-droite  $[op$  ne rencontre pas  $E$  puisqu'elle lui est parallèle. L'image de la droite  $E$  est donc une demi-droite ouverte.

Nous pouvons faire le même raisonnement pour le bord gauche de la route et voir que son image aboutit également à  $p$ . L'image de la route sur le tableau converge donc vers  $p$  (Fig. 31 et 32).

Quelle que soit la façon dont vous avez résolu le problème, il est utile que vous remarquiez que l'image de la route a un point de fuite, car cette découverte est une étape très importante dans l'apprentissage du dessin en perspective.



Une route montante. Solution.

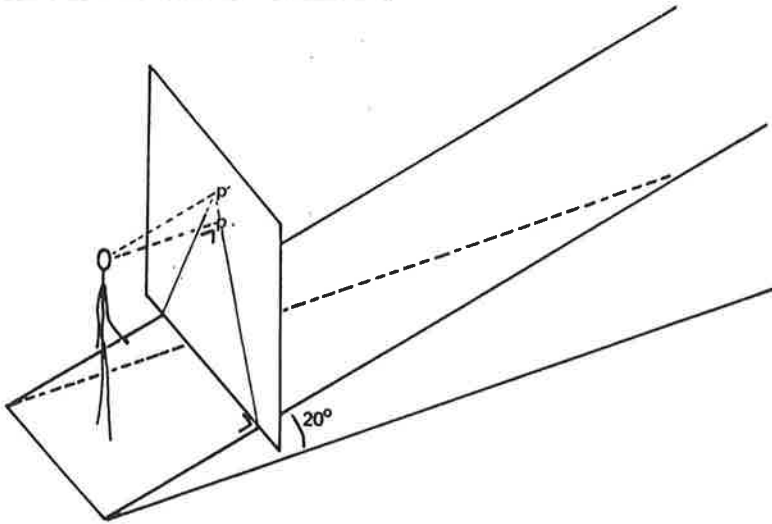


Fig. 35

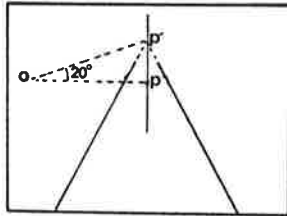


Fig. 36

La direction du regard du peintre lorsqu'il regarde un point "à l'infini" sur la route est parallèle à celle-ci. Le point de fuite  $p'$  de la route sera donc le point de projection de l'oeil sur la vitre parallèlement à la route (Fig. 35).

Connaissant la distance  $D$  et la pente de la route, nous pouvons trouver  $p'$  sur la Fig. 30 par construction, en imaginant la situation de profil (Fig. 37) puis en la dessinant sur le tableau (Fig. 36).

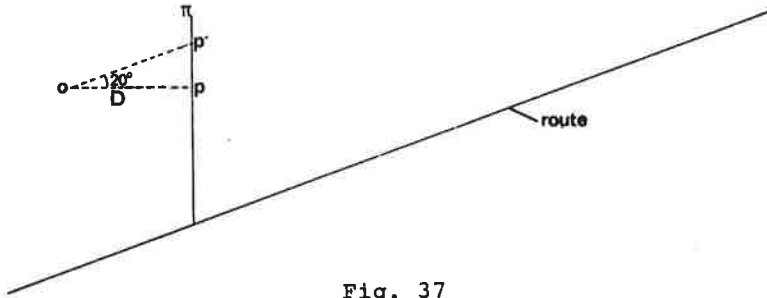


Fig. 37

3. REPRESENTATION DE DROITES QUI NE SONT PAS SUR LE SOL

Un mur

Dessinez, sur la Fig. 38, un mur longeant la route.

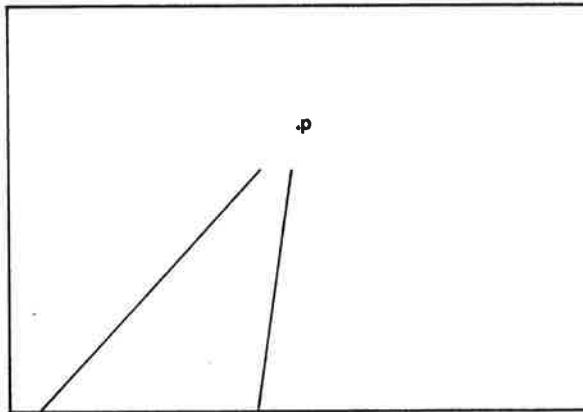


Fig. 38

Une pièce

Le sol et la porte d'une pièce sont dessinés sur la Fig. 39. Dessinez les murs, le plafond et une ou deux fenêtres de cette pièce.

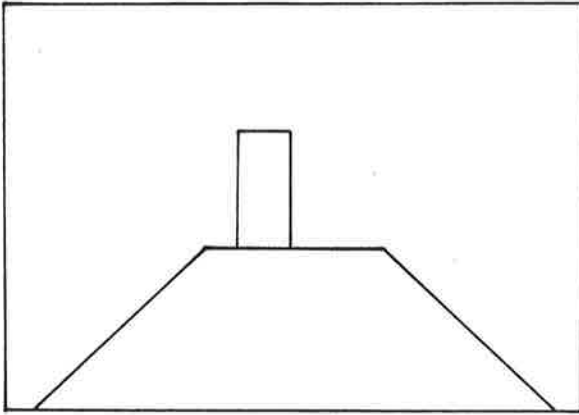


Fig. 39

Un mur. Solution.

Le point de fuite d'une droite sur un tableau est le point de projection de l'oeil sur le tableau parallèlement à la droite. Toutes les droites parallèles à la route dessinée à la Fig. 38 ont donc le même point de fuite  $p$  que la route. Dès lors, le mur longeant la route se dessine en traçant le bord supérieur du mur fuyant vers  $p$  comme à la Fig. 40.

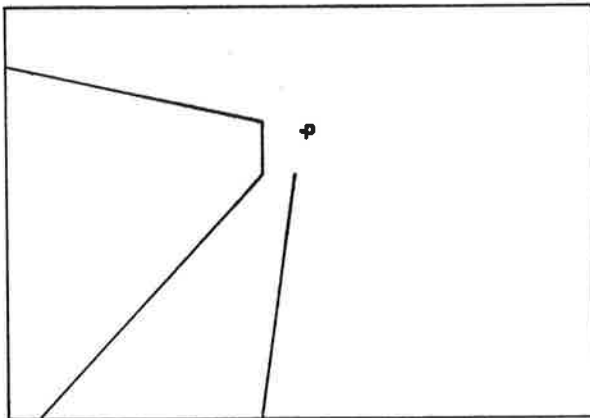


Fig. 40

Une route. Solution.

De même, pour compléter la Fig. 39, il suffit de trouver le point de fuite des arêtes du sol et de tracer le mur, le plafond et les fenêtres fuyant vers ce point (Fig. 41).

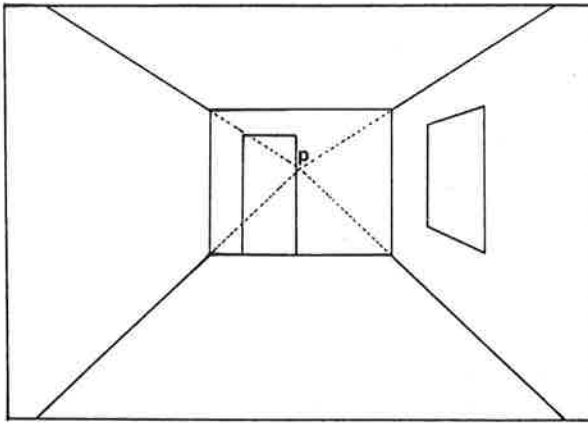


Fig. 41

4. POINTS DE FUITE DANS LES PEINTURES

Est-ce correct ?

Les lignes supposées parallèles dans les peintures suivantes (Fig. 42 et 43) sont-elles en accord avec la perspective centrale ?



Fig. 42

*La confirmation de la règle de Giotto et ses aides, la basilique supérieure d'Assise, 1296-98 environ.*



Fig. 43

*L'annonciation de A. Lorenzetti, Sienne, 1344.*

La forme de la place Saint-Marc

D'après la peinture de Canaletto (Fig 44), la place Saint-Marc à Venise est-elle rectangulaire ?



Fig. 44

*La place Saint-Marc* de G.A. Canaletto, Lugano, avant 1723 (coll. van Thyssen).

Est-ce correct ? Solution.

Dans le tableau de Giotto, les parallèles du plafond ne convergent pas toutes en un même point. Elles ne sont donc pas dessinées comme on l'aurait fait en perspective centrale. En effet, d'après la Section 2, il n'y a qu'un point de fuite pour toutes les droites d'une direction donnée.

Néanmoins, Giotto fut un des précurseurs de la perspective classique dans le sens où les lignes parallèles du plafond convergent déjà vers une zone de fuite.

Lorenzetti, par contre, fait converger les lignes du carrelage en un seul point. *L'Annonciation* constitue une

première étape dans la découverte du point de fuite pour les droites parallèles. Dans ce cas-ci, on voit apparaître la convergence des perpendiculaires au tableau (E. Panofsky, 1975). Nous verrons au Chap. 3 que les droites du carrelage qui apparaissent parallèles dans le tableau ne sont pas, elles, conformes aux règles de la perspective centrale.

La forme de la place Saint-Marc. Solution.

Dans la peinture de Canaletto, le point de fuite du bâtiment de gauche,  $f_1$ , et celui du bâtiment de droite,  $f_2$ , ne coïncident pas. Ceci signifie que les bâtiments ne sont pas parallèles.

Nous avons vu à la Section 2 que si  $f$  est le point de fuite d'une droite  $E$  alors  $of$  (où  $o$  représente l'oeil du peintre) est parallèle à  $E$ . Grâce à cela, nous pouvons faire un plan sommaire de la place Saint-Marc en traçant le bâtiment de gauche, parallèle à  $of_1$  et celui de droite, parallèle à  $of_2$  (Fig. 45). Remarquons qu'il faudrait connaître la distance de l'oeil au tableau pour obtenir un plan correct.

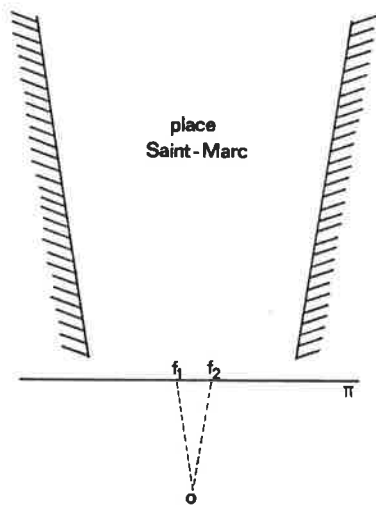


Fig. 45

La Fig. 46 est un plan fidèle de la place Saint-Marc. Et en effet, on constate que celle-ci n'est pas rectangulaire. Néanmoins, d'après G.M. Pilo (1961), dans le tableau de Canaletto, "les dimensions de la place et la vue que l'on a de l'endroit où se trouvait l'artiste sont volontairement altérées : les ailes des Procuraties, à gauche et à droite, divergent de manière à créer une impression de plus vaste espace, nullement en rapport avec les proportions réelles".

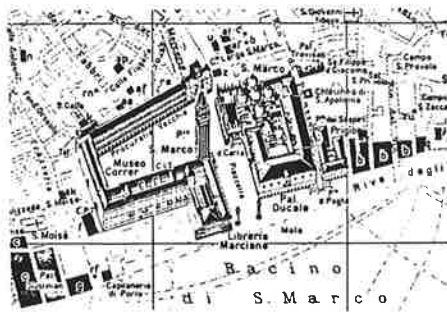


Fig. 46

## 5. DROITES EN TOUT GENRE

### Points de fuite des droites horizontales

Quel est l'ensemble des points de fuite de toutes les droites horizontales ?

### Où est le nord ?

Dessinez , au dessus de la maison de la Fig. 47, une girouette indiquant le sud-sud-est, sachant que les deux routes dessinées vont l'une vers le nord (celle-là est perpendiculaire au tableau), l'autre vers le nord-est.



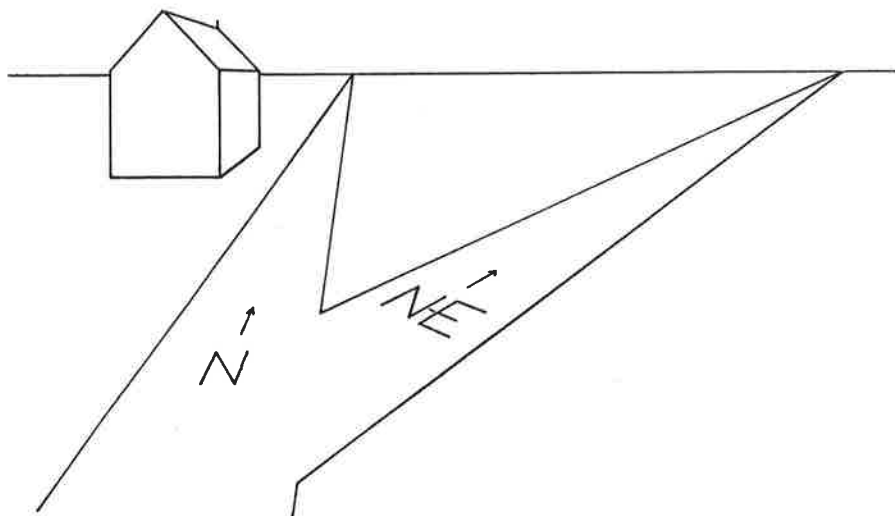


Fig. 47

Piste. Esquissez une vue en plan de la maison, la rose des vents, la girouette, les routes, le tableau  $\pi$  et le dessinateur  $o$ .

Trouvez sur ce plan l'emplacement sur  $\pi$  des points de fuite des deux routes à partir du point  $o$  et de leurs directions. Quelle est la relation entre la distance de l'oeil au tableau et la distance entre les deux points de fuite des deux routes ?

Trouvez, sur le plan, l'emplacement sur  $\pi$  du point de fuite de la direction sud-sud-est et reportez votre construction à la bonne grandeur sur la Fig. 47.

Les problèmes suivants (la fin de cette section et la section suivante) sont d'ordre un peu plus théorique.

Nouveau lieu de points de fuite

Quel est l'ensemble des points de fuite de toutes les droites (pas seulement les horizontales) faisant un angle de

45° avec les perpendiculaires au tableau ?

Lignes de fuite

La *ligne de fuite* d'un plan est l'ensemble des points de fuite de toutes les droites parallèles à ce plan.

Trouvez les lignes de fuite respectives des plans  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  déterminés par les murs et le toit de la maison dessinée à la Fig. 48.

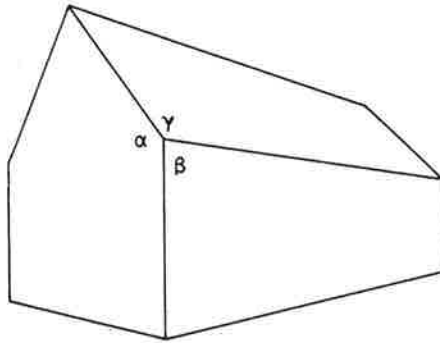


Fig. 48

Points de fuite des droites horizontales. Solution.

Le point de fuite d'une droite horizontale  $H$  est le point d'intersection du plan  $\pi$  et de la droite horizontale passant par  $o$  et parallèle à  $H$ . L'ensemble des points de fuite des droites horizontales est donc l'ensemble des points d'intersection du plan  $\pi$  et des droites horizontales passant par  $o$ .

C'est la droite horizontale passant par p. On l'appelle la *ligne d'horizon*.

Où est le nord ? Solution.

La Fig. 49 représente un schéma de la situation en plan.

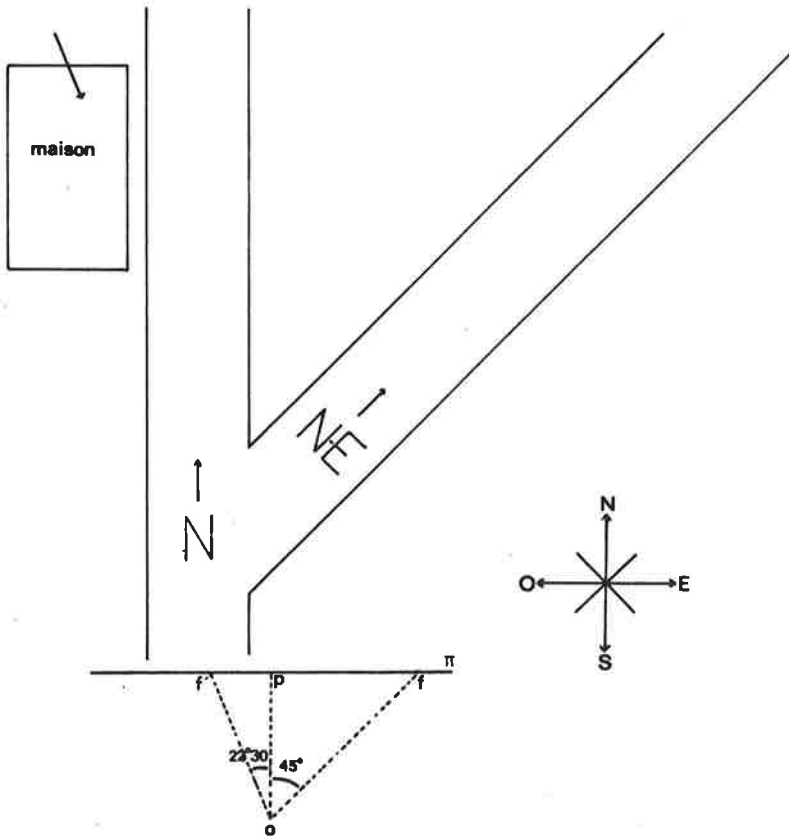


Fig. 49

Pour trouver le point de fuite d'une direction donnée, on mène la droite passant par o et ayant cette direction. Le point cherché se trouve à l'intersection de cette droite et du tableau.

La distance de l'œil, o, au tableau,  $\pi$ , est égale à la distance entre les deux points de fuite p et f, si f est le point de fuite de la direction NE. En effet, le triangle

opf est rectangle isocèle (un angle droit et un angle de  $45^\circ$ ).

Nous pouvons maintenant construire, sur la Fig. 47, le point de fuite de la direction sud-sud-est (sur la ligne d'horizon) en reportant le triangle opf' avec  $op = pf'$  (Fig. 50). Ceci revient à faire une rotation de  $90^\circ$  dans l'espace autour de la ligne d'horizon pour rabattre o sur le tableau (Fig. 51).

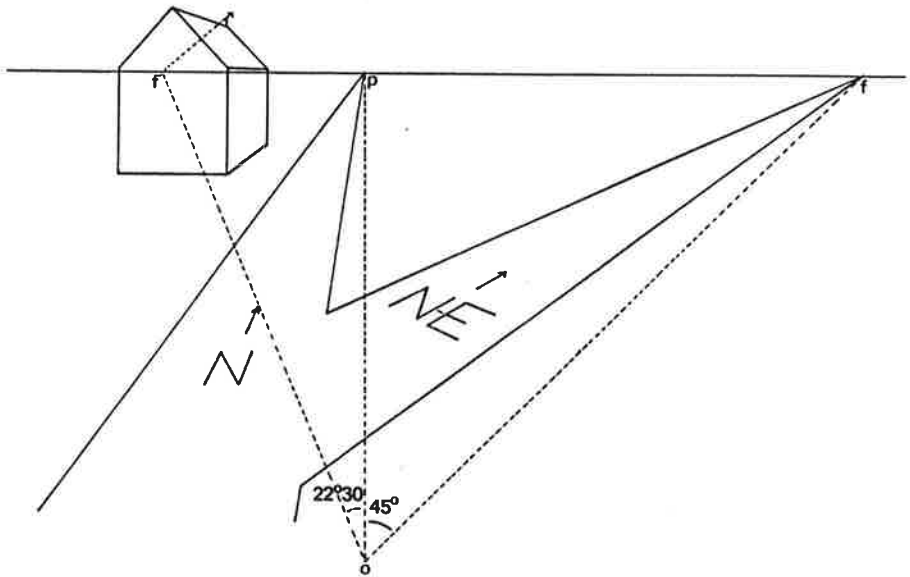


Fig. 50

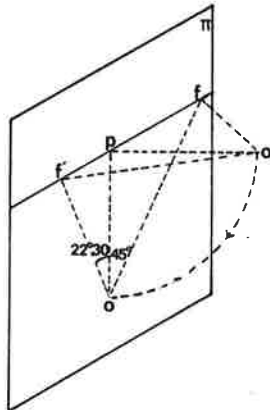


Fig. 51

Nouveau lieu de points de fuite. Solution.

Tous les points de fuite des droites faisant un angle de  $45^\circ$  avec  $op$  sont à une distance  $D$  (distance de l'oeil au tableau) du point  $p$  (Fig. 52). L'ensemble de ces points est donc un cercle de rayon  $D$ , centré en  $p$ .

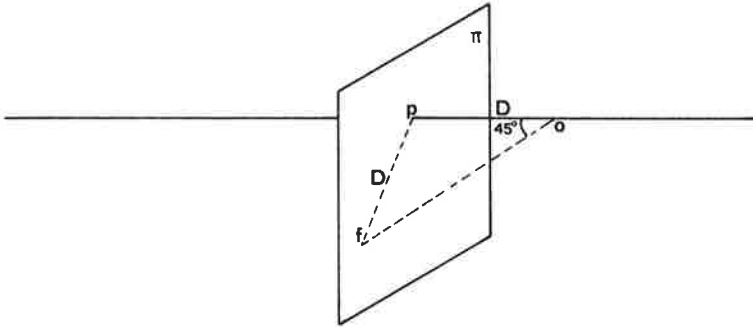


Fig. 52

Lignes de fuite. Solution.

La ligne de fuite d'un plan  $\delta$  est l'ensemble des points d'intersection des droites parallèles à  $\delta$  passant par  $o$  et du plan du tableau. Comme ces droites constituent un plan, la ligne de fuite de  $\delta$  est une droite. Elle est donc déterminée par deux de ses points.

Les arêtes du toit  $\gamma$  déterminent deux points,  $f_1$  et  $f_2$  (Fig. 53); la ligne de fuite de  $\gamma$  est donc  $f_1f_2$ . Si nous voulons tracer une droite appartenant à ce plan (la diagonale du toit, par exemple), nous devons donc la dessiner jusqu'à la ligne de fuite  $f_1f_2$ . Le point qu'elle atteindra sur cette ligne sera son point de fuite.

Les deux arêtes *fuyantes* (celles qui ont un point de fuite) du plan  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) déterminent un point  $f_1$  (resp.  $f_3$ ), mais les deux autres sont parallèles l'une à l'autre. La ligne de fuite de  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) ne peut que leur être parallèle. En effet, si elle ne l'était pas, les deux arêtes pourraient être prolongées jusqu'à la ligne de fuite qu'elles atteindraient en deux points (de fuite) distincts. Et ceci n'est pas possible

puisque deux droites parallèles dans la réalité ont même point de fuite ou n'en ont pas du tout (dans quel cas ?).

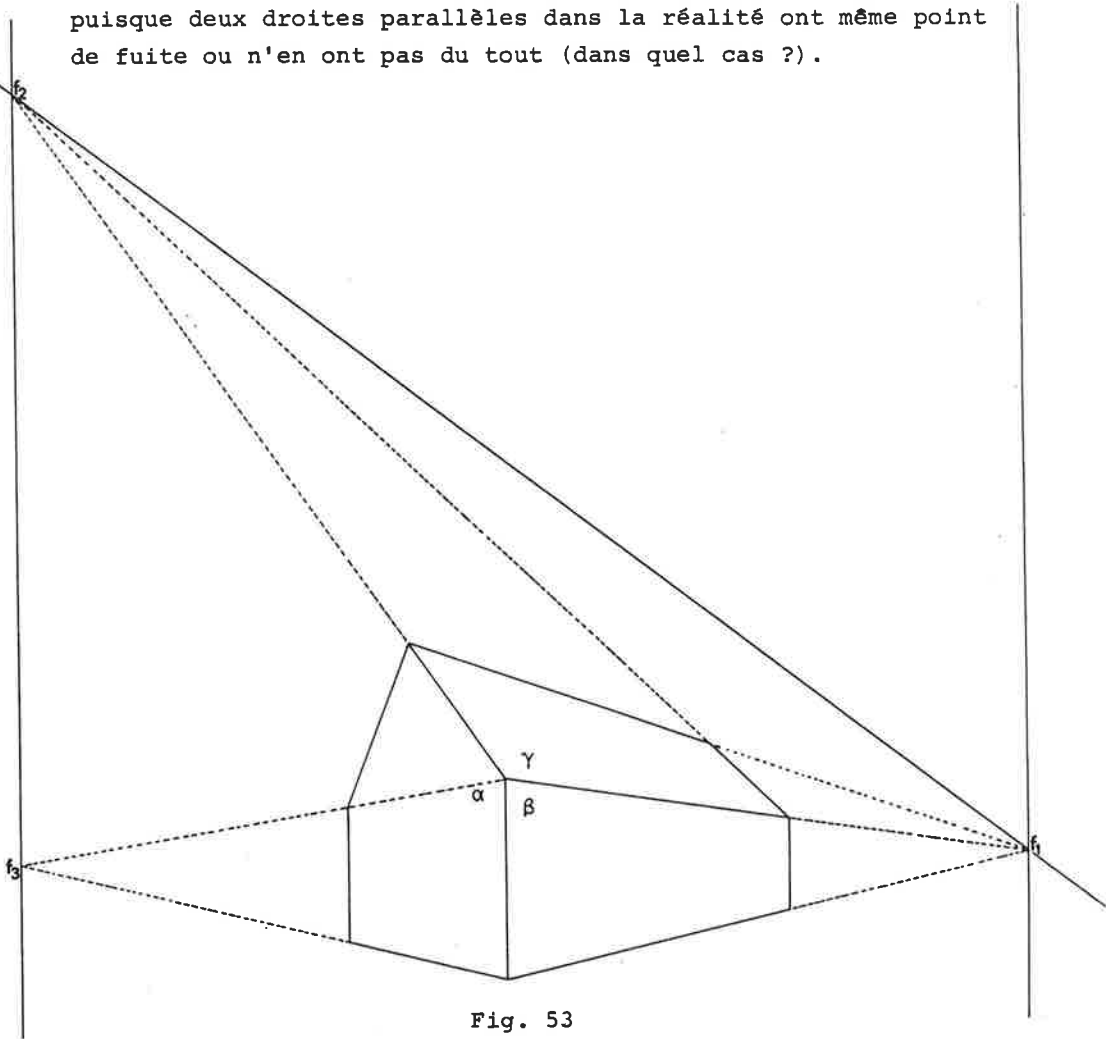


Fig. 53

## 6. EXTENSION A LA PROJECTION CENTRALE

### Les invariants d'une projection centrale

Sur la Fig. 54, tracez l'image des droites E et F et des points a, b, c, d, e, f, g, h, i, par la projection de centre o sur le plan  $\pi$  (voir la définition de projection centrale au Chap. 1, Section 2).

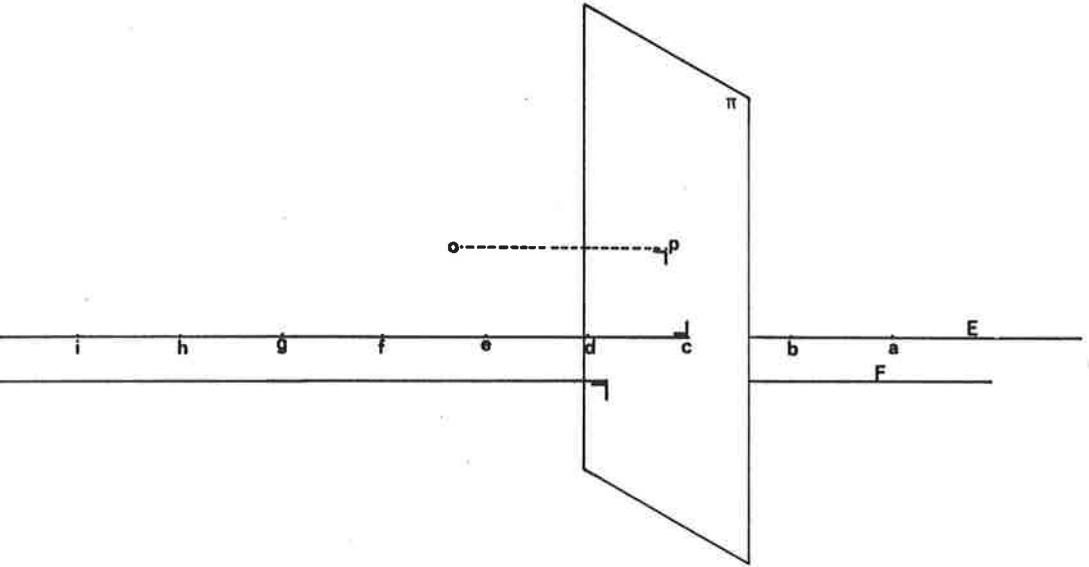


Fig. 54

La projection centrale conserve-t-elle l'ordre dans lequel on rencontre les points sur une droite ? Conserve-t-elle l'égalité des distances sur une droite ? L'image d'un segment est-elle un segment ? Tous les points d'une droite ont-ils une image ? L'image d'une droite est-elle une droite ?

Les parallèles

a) Dans quel(s) cas les images de deux droites parallèles par projection centrale sont-elles

- 1° parallèles ?
- 2° sécantes ?

b) Les images de deux droites sécantes sont-elles toujours sécantes ?

Les invariants d'une projection centrale . Solution.

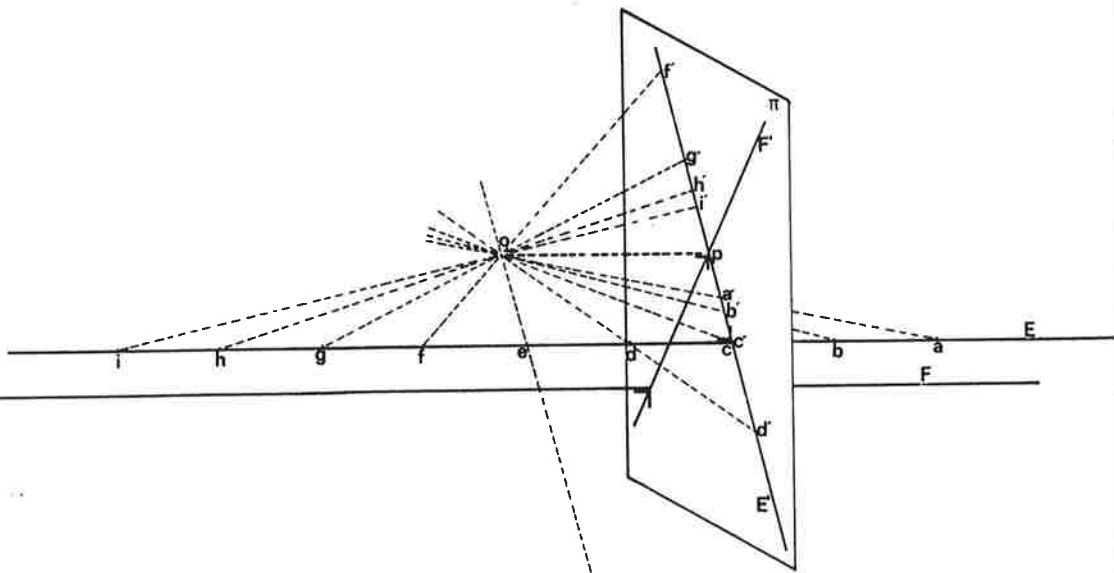


Fig. 55

Les images  $E'$  et  $F'$  des droites  $E$  et  $F$  se croisent au point de fuite  $p$  (Fig. 55). La projection centrale ne conserve pas l'ordre dans lequel on rencontre les points sur une droite; plus un point est proche du plan  $\pi_0$  parallèle à  $\pi$  passant par  $o$ , plus son image sur  $\pi$  est éloignée de  $p$ .

L'égalité des distances n'est pas du tout conservée : sur  $E'$ ,  $|a' b'| \neq |c' d'|$  alors que, sur  $E$ ,  $|a b| = |c d|$  et plus on s'approche de  $p$  sur  $E'$ , plus les images de segments de même longueur sont petites.

L'image d'un segment n'est pas toujours un segment<sup>8</sup> : l'image de  $[c e]$  est la demi-droite  $[c' d'$  et l'image de  $[c g]$  est l'union des deux demi-droites  $[c' d'$  et  $[g' f'$ .

<sup>8</sup> Quoique la projection centrale ait été définie sur l'espace moins le plan  $\pi_0$ , nous allons imaginer ce que pourraient être les images des points de  $\pi_0$  (par exemple, le point  $e$ ).



Le point  $e$  n'a pas d'image sur  $\pi$  car  $oe$  est parallèle à  $\pi$ , mais plus un point est proche de  $e$  sur la droite  $E$ , plus son image est éloignée de  $p$ . Pour que  $e$  ait une image, nous conviendrons de dire que  $e$  a une image  $e'$  à l'infini sur  $\pi$  et que les droites  $oe$  et  $E'$  se rencontrent en ce point  $e'$  appelé *point à l'infini* des droites  $oe$  et  $E'$ . Nous ajoutons donc aux points des droites  $oe$  et  $E'$  ce point à l'infini  $e'$ .

D'autre part,  $p$  n'est l'image d'aucun point de  $E$ , mais plus un point est proche de  $p$  sur  $E'$ , plus le point de  $E$  dont il est l'image est éloigné de  $e$ . Nous conviendrons de dire que  $p$  est l'image d'un *point à l'infini*  $z$  de  $E$  et que les droites  $op$  et  $E$  se rencontrent en ce point. Nous ajoutons donc aux points des droites  $op$  et  $E$  ce point à l'infini  $z$ .

L'introduction de la notion de point à l'infini d'une droite permet de donner aux énoncés sur les projections centrales une plus grande généralité. Nous pouvons maintenant affirmer que l'image de la droite  $E$  par la projection centrale est la droite  $E'$ .

Il nous paraîtrait naturel d'ajouter à chaque droite deux points à l'infini : la droite  $E$ , par exemple, en aurait un "à droite" et un "à gauche". Pourtant, pour que chaque point de  $E$  ait une seule image sur  $E'$  et chaque point de  $E'$  soit l'image d'un seul point de  $E$ , nous considérons que chaque droite a *un seul* point à l'infini.

Nous avons donc étendu notre définition de *projection centrale* de centre  $o$  à tout l'espace (y compris les points à l'infini) excepté le point  $o$  lui-même.

Considérons une droite passant par  $o$ . L'image de cette droite moins le point  $o$  est le point de percée de cette droite dans le plan  $\pi$ . A part dans ce cas et dans celui d'une droite entièrement comprise dans  $\pi$ , que nous n'envisagerons pas ici, l'image d'une droite est bien une droite.

Les parallèles. Solution.

a) Deux droites parallèles ont des images sécantes sauf si elles sont parallèles au plan de projection  $\pi$ . De plus, l'image d'une droite parallèle au plan de projection est une droite qui lui est parallèle.

b) Les images de deux droites sécantes en un point  $a$  sont sécantes en  $a'$ , image de  $a$  sur  $\pi$ . Mais si le point  $a$  se trouve dans le plan  $\pi_0$  parallèle à  $\pi$ , passant par  $o$ , alors son image est à l'infini sur  $\pi$  et les images des deux droites sont parallèles.

## CHAPITRE 3

### DIVISER EN PARTIES EGALES

Dans ce chapitre, les Sections 1 et 2 peuvent être inversées. Les problèmes de la Section 2 peuvent d'ailleurs aider le lecteur à résoudre ceux de la Section 1. Toutefois, nous avons choisi cet ordre-ci car la recherche d'une solution au problème du troisième arbre sans les indications qui pourraient venir de la Section 2 nous semble fort enrichissante.

#### 1. UNE ROUTE BORDEE D'ARBRES

##### Où est le troisième arbre ?

Des arbres sont plantés à intervalles réguliers le long de la route. La route et les deux premiers arbres sont dessinés à la Fig. 56. Dessinez les arbres suivants.

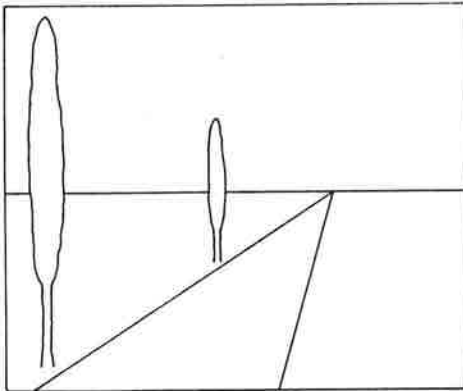


Fig. 56

Voici trois pistes au choix :

Première piste. Commencez par examiner le rectangle en perspective de la Fig. 57. Où est son milieu ?

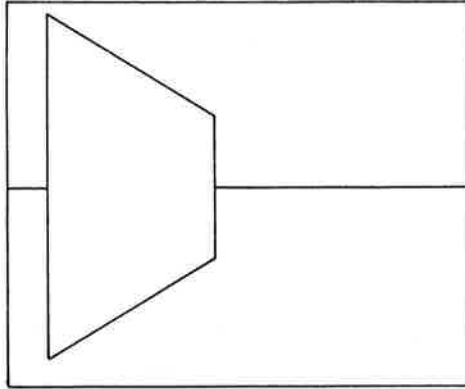


Fig. 57

Ensuite, dessinez un arbre au milieu des deux autres à la Fig. 56.

Deuxième piste. Complétez d'abord la rangée d'arbres de la Fig. 58.

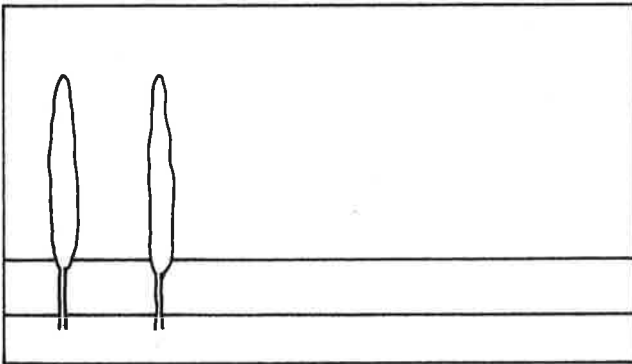


Fig. 58

Dessinez sur la Fig. 56, une droite A horizontale (sur le plan du sol), parallèle au tableau et servez-vous, pour compléter la rangée d'arbres, du théorème de Thalès (Appendice 3) et de la possibilité de diviser en parties égales la droite A.

Eventuellement, faites-le d'abord sur la Fig. 59 repré-

sentant la situation en plan.

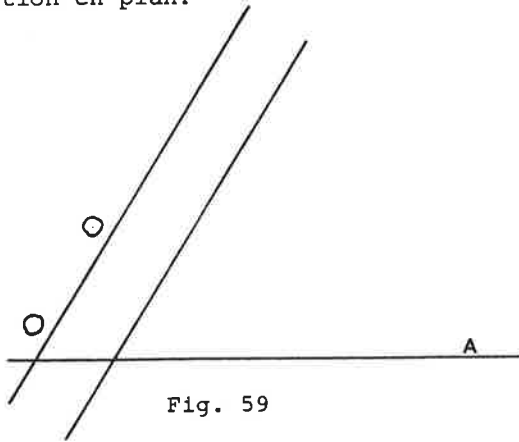


Fig. 59

Troisième piste. A partir du schéma représentant la situation de côté (Fig. 60), établissez une formule qui donne la distance  $L_2$  sur le dessin du deuxième ou troisième arbre en fonction des éléments  $L$  et  $L_1$ , mesurables à la Fig. 56.

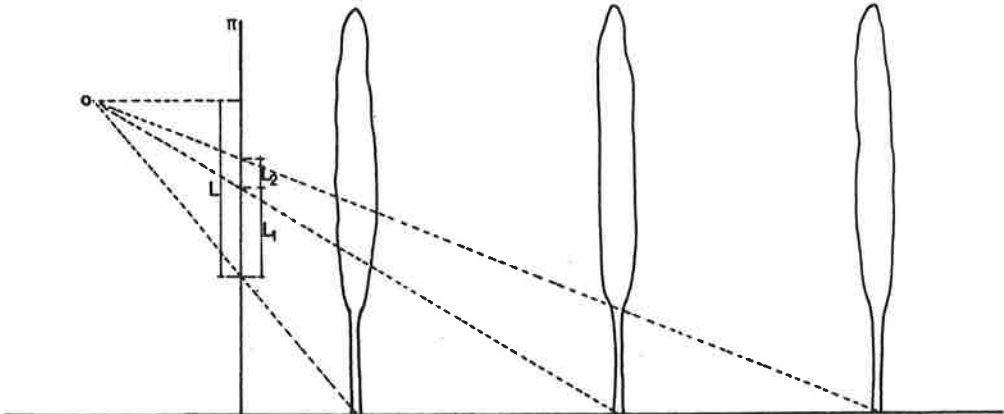


Fig. 60

Deux dessins pour la même route.

Pour chacun des deux tableaux (Fig. 61 et 62), combien d'arbres y a-t-il entre le premier arbre dessiné et le dessinateur ? Prolongez le tableau et dessinez-les.

Ces deux tableaux peuvent-ils représenter la même route

et les mêmes arbres ? Dans quel cas ?

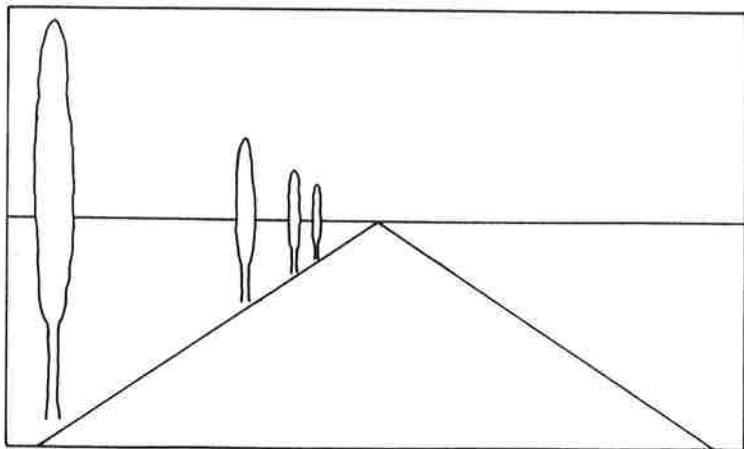


Fig. 61

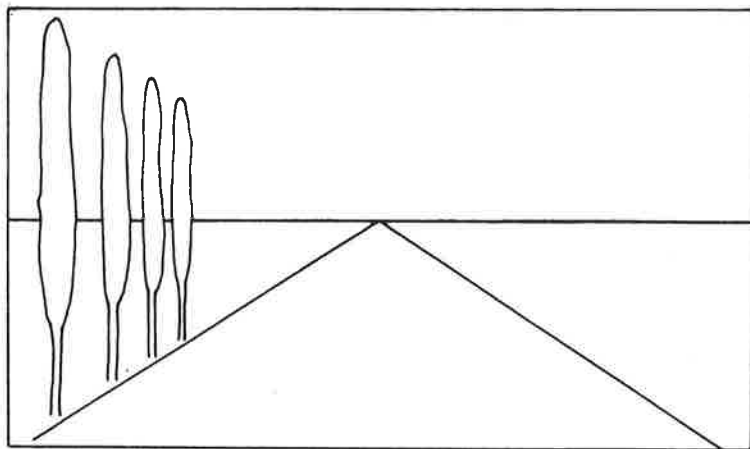


Fig. 62

Et quand le dessinateur est à côté du premier arbre ?

Un dessinateur se trouve, au milieu d'une route bordée d'arbres, à hauteur de l'un d'entre eux. Son tableau est perpendiculaire à la route. La Fig. 63 est un exemple d'une telle situation. La route et le deuxième arbre sont dessinés à la Fig. 64 dessinez les suivants.

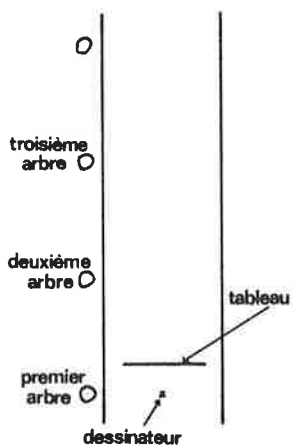


Fig. 63

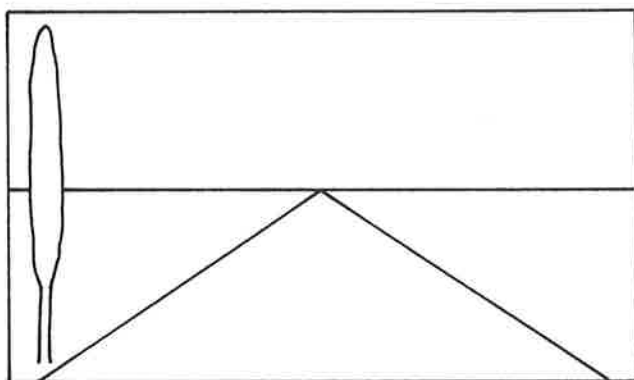


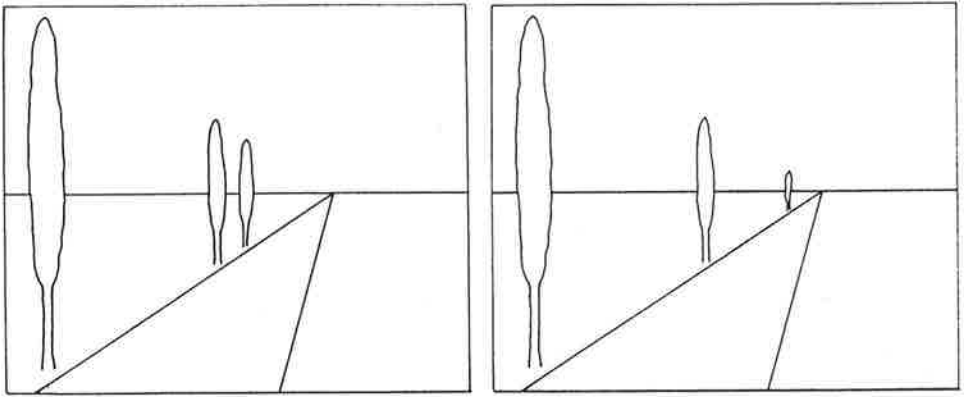
Fig. 64

Piste. Prolongez le tableau et dessinez - si possible! - le premier arbre. L'idée est que, quand vous aurez le premier et le deuxième arbre, vous pourrez dessiner le troisième et les suivants en appliquant une des méthodes vues plus haut.

Où est le troisième arbre ? Solution.

Une première question se pose : n'y a-t-il qu'une solution au problème ? En effet, la position du troisième arbre pourrait dépendre de la distance de l'oeil au tableau, de la hauteur de l'oeil au dessus du sol ou d'autres choses encore que l'on ne connaît pas. Ni le dessin de la route, ni la position des arbres sur le tableau ne permettent de déterminer à quelle distance du tableau et à quelle hauteur au dessus du sol se situe l'oeil du dessinateur (le bord inférieur du tableau n'est pas forcément sur la route).

Néanmoins, par essais et erreurs, on se rend compte que le troisième arbre ne peut pas se placer n'importe où (Fig. 65). On a même l'impression qu'il n'y a qu'un emplacement exact, mais où ? Pour le trouver, plusieurs procédés sont possibles; nous en donnons quatre.



trop près

trop loin

Fig. 65

La Fig. 66 montre la situation oeil-tableau-route de profil. Les points a et b représentent les pieds des arbres. Les longueurs  $L_1$  et  $L$  peuvent être mesurées sur le tableau comme le montre la figure. La distance  $D$  de l'oeil au tableau et la hauteur  $H$  de l'oeil au dessus du sol ont été choisies arbitrairement; nous prouverons dans la suite que la solution ne dépend pas de ces deux distances.

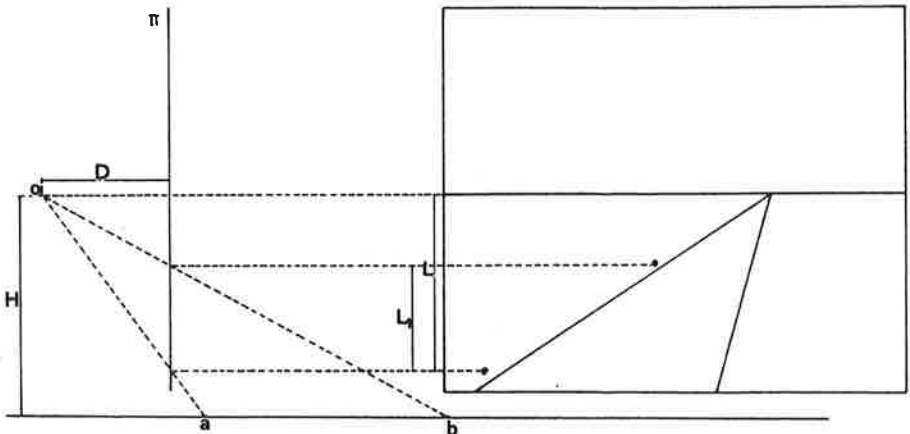


Fig. 66

Première méthode. Si nous sommes convaincus qu'il n'y a qu'une solution possible, nous pouvons résoudre le problème par construction en complétant la Fig. 66 comme indiqué à la Fig. 67.





Puisque les longueurs  $|a b|$  et  $|b c|$  sont égales, par le théorème de Thalès (Appendice 3), les longueurs  $|d e|$  et  $|e f|$  le sont aussi; désignons celles-ci par  $M$  et désignons par  $M'$  la longueur  $|g h|$ .

La similitude (Appendice 4) des triangles  $igh$  et  $idf$  permet d'écrire que

$$\frac{M'}{2 M} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} . \quad (1)$$

D'autre part, la similitude des triangles  $ogh$  et  $oef$  permet d'écrire que

$$\frac{M'}{M} = \frac{L - L_1}{L} . \quad (2)$$

(deux côtés sont entre eux comme les hauteurs des triangles).

En éliminant  $\frac{M'}{M}$  entre (1) et (2), on obtient

$$\frac{2 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{L - L_1}{L} ,$$

d'où

$$L_2 = L_1 \cdot \frac{(L - L_1)}{(L + L_1)} .$$

La longueur  $L_2$  et ainsi l'emplacement du troisième arbre sont donc entièrement déterminés par les éléments  $L$  et  $L_1$  du tableau. Nous pouvons obtenir  $L_2$  par mesures et calculs.

Troisième méthode. La difficulté du problème réside dans le fait que la droite qui passe par les pieds des arbres est fuyante (elle a un point de fuite). Si elle était parallèle au plan du tableau, le problème serait vite résolu. Il suffirait de placer les arbres à intervalles réguliers sur le tableau comme ils le sont en réalité. On peut s'en convaincre en appliquant le théorème de Thalès (Appendice 3) à la Fig. 69 représentant les arbres,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et leurs images  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , sur le tableau  $\pi$  (en vue du dessus).

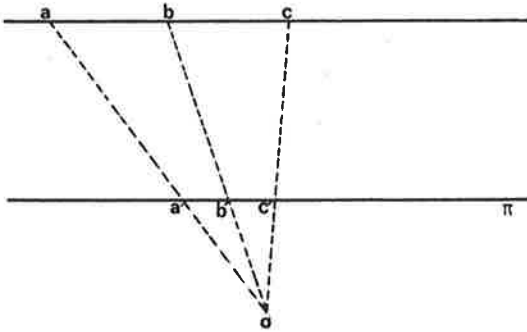


Fig. 69

Servons-nous de cette propriété pour résoudre le problème du troisième arbre quand la route est fuyante.

Dans la Fig. 70,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , représentent les trois arbres (en vue du dessus) et A est une droite du sol, parallèle au tableau. Traçons trois droites parallèles passant par  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ . Elles intersectent A en trois points  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  et, par le théorème de Thalès, ces trois points sont placés à intervalles réguliers sur A.

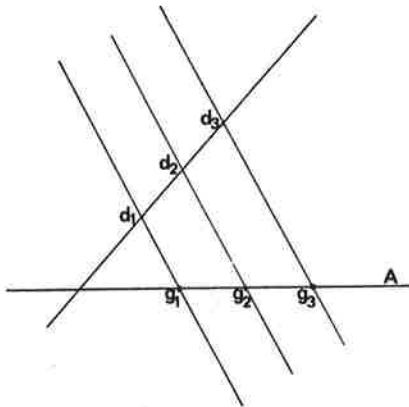


Fig. 70

Dessignons cette situation en perspective (Fig. 71). Nous pouvons alors appliquer cela à notre problème. En effet, il suffit de tracer sur le tableau une droite horizontale A, puis de faire la même construction qu'à la Fig. 71 :

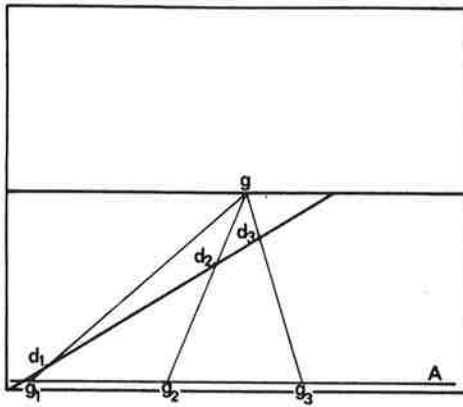


Fig. 71

- tracer deux parallèles fuyant vers un point  $g$  de la ligne d'horizon et passant par  $d_1$  et  $d_2$ , les pieds des deux premiers arbres;

- placer le point  $g_3$  tel que  $|g_1 g_2| = |g_2 g_3|$ ;

- tracer par  $g_3$  la troisième parallèle fuyant vers  $g$ ; cette droite donnera l'emplacement du point  $d_3$ .

Nous pourrions faire cette construction avec une autre droite horizontale  $A$  ou des droites parallèles ayant une autre direction (Fig. 72); nous obtiendrions le même point  $d_3$ .

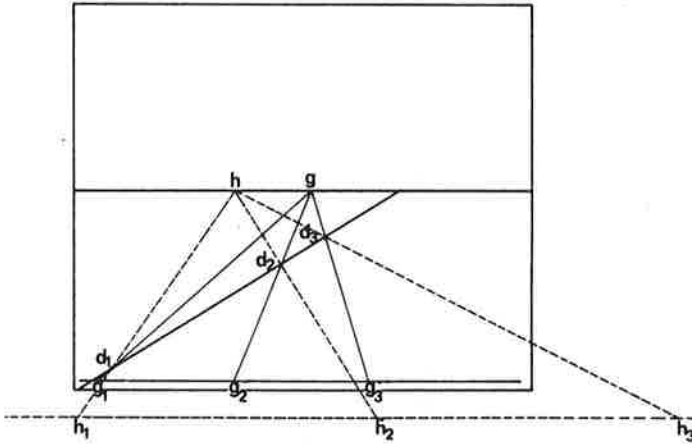


Fig. 72

L'équivalence des deux constructions de la Fig. 72 peut être rapidement démontrée lorsqu'on considère cette figure comme l'image en perspective d'une configuration de l'espace (celle de la Fig. 70), comme nous l'avons fait jusqu'à présent.

Il est intéressant de voir que cette équivalence est nettement plus difficile à démontrer en considérant la Fig. 72 comme une simple figure plane<sup>10</sup>.

Quatrième méthode. Si le problème avait été de placer le deuxième arbre, étant données les positions du premier et du troisième, nous aurions pu trouver son emplacement en considérant les deux arbres comme deux côtés opposés d'un rectangle. L'intersection des diagonales aurait alors déterminé le milieu de l'arbre à placer (Fig. 73).

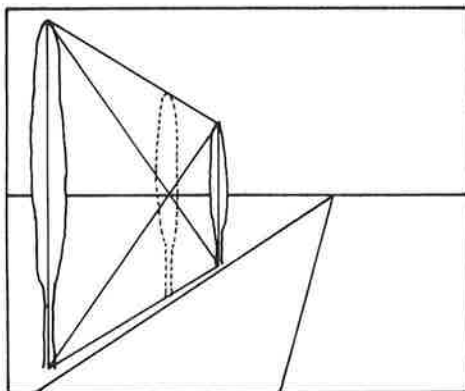


Fig. 73

De même, pour trouver l'emplacement du troisième arbre à partir des deux premiers, on peut considérer le milieu du deuxième arbre comme le centre d'un rectangle dont deux des côtés sont le premier et le troisième arbre. Il suffit donc de tracer les diagonales de ce rectangle - elles passent par le milieu du deuxième arbre - pour trouver l'emplacement du troisième arbre (Fig. 74).

<sup>10</sup> Il existe d'autres problèmes relatifs à des figures planes et qui sont plus faciles à résoudre quand on considère les figures comme des images en perspective de configurations de l'espace (par exemple les théorèmes de Pappus et de Desargues). A ce sujet, voir Irem de Lille (1987).

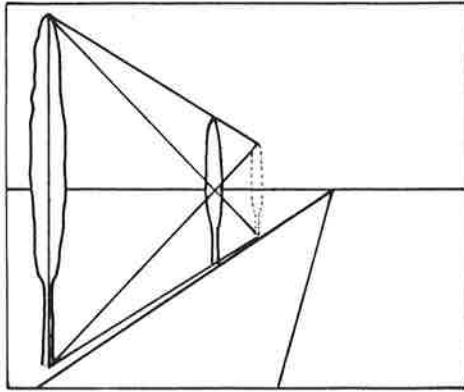


Fig. 74

Par delà les solutions, pourtant variées, que nous venons d'exposer, il en existe d'autres utilisant des outils mathématiques divers comme, par exemple, la géométrie descriptive (cf. Lubczanski, 1986).

Deux dessins pour la même route. Solution.

Appliquons aux Fig. 61 et 62 la méthode de la Fig. 71 pour dessiner les arbres proches du dessinateur.

Pour la Fig. 61

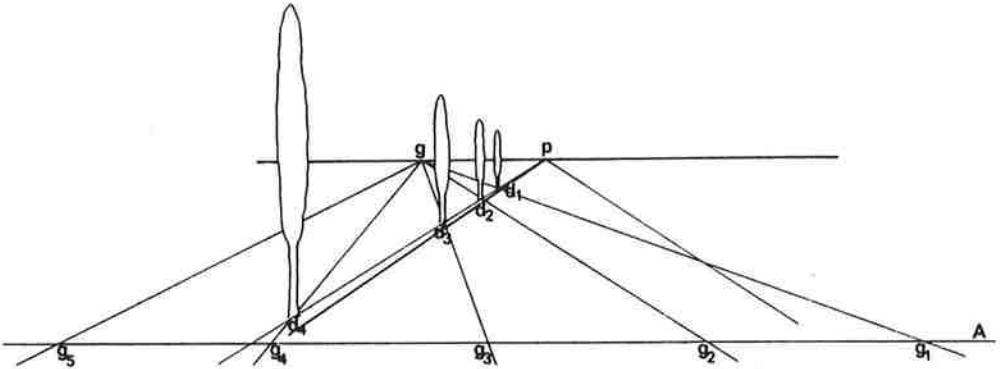


Fig. 75

Sur la Fig. 75, les demi-droites  $lg d_1, lg d_2, lg d_3, lg d_4$  issues d'un point  $g$  arbitraire sur la ligne d'horizon et passant par les pieds des arbres coupent la droite horizontale  $A$  en  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$ . Pour trouver l'arbre juste devant l'arbre  $d_4$ , nous cherchons  $g_5$  sur  $A$  tel que  $|g_5 g_4| = |g_4 g_3| = |g_3 g_2| \dots$ , puis nous cherchons l'intersection de la demi-droite  $lg g_5$  et de la demi-droite  $lp d_1$  des arbres. Puisque, dans ce cas-ci, cette intersection n'existe pas c'est qu'il n'y a pas d'arbre entre le premier arbre dessiné et le dessinateur.

Nous aurions bien sûr pu utiliser une autre méthode pour obtenir ce résultat. Essayez !

Pour la Fig. 62

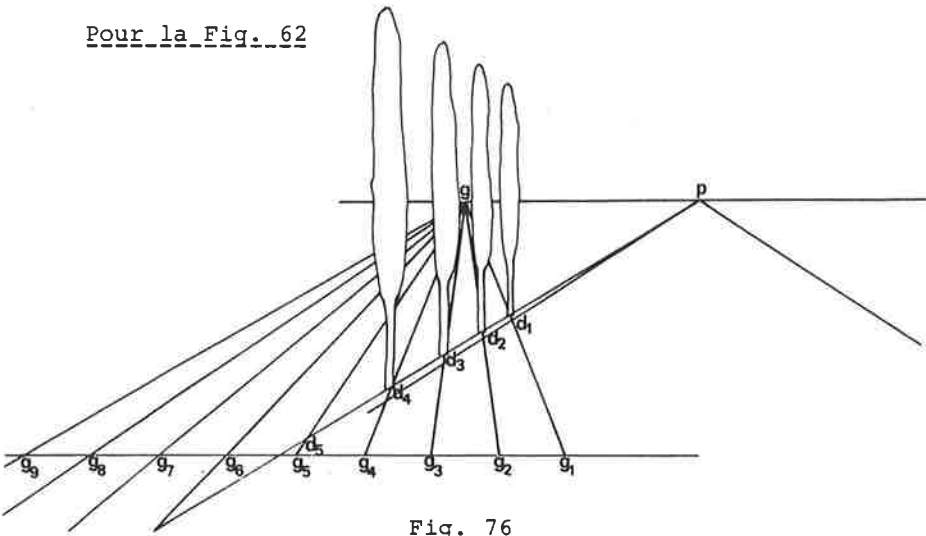


Fig. 76

Sur la Fig. 76, les demi-droites  $lg g_5, lg g_6, lg g_7$  et  $lg g_8$  coupent la demi-droite  $lp d_1$  des arbres; la demi-droite  $lg g_9$  ne la coupe pas. Il y a donc quatre arbres entre le premier arbre dessiné et le dessinateur.

Les Fig. 61 et 62 ne donnent aucune indication sur l'écart entre les arbres. Elles peuvent représenter la même route et les mêmes arbres. Pour la Fig. 61, le dessinateur s'est placé assez près du premier arbre dessiné (Fig. 77) alors que, pour la Fig. 62, quatre arbres le séparent du premier arbre dessiné (Fig. 78).

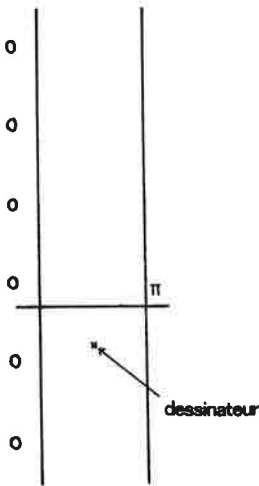


Fig. 77

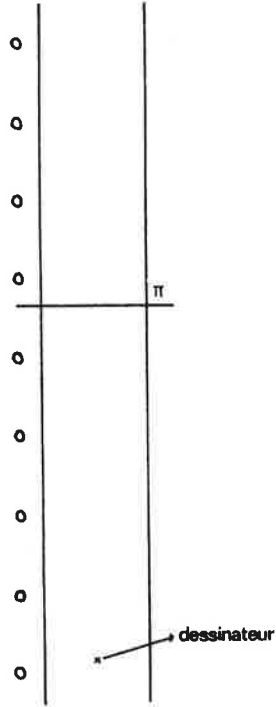


Fig. 78

Et quand le dessinateur est à côté du premier arbre ?

Solution.

Comme le premier arbre se trouve dans le plan passant par l'oeil du dessinateur et parallèle au plan du tableau, son image sur le plan du tableau est à l'infini sur la demi-droite issue du point de fuite de la route et passant par le pied de l'arbre déjà dessiné. Nous devons donc placer les autres arbres de telle façon que la construction, à partir d'eux, de l'emplacement du premier rejette celui-ci à l'infini.

La Fig. 79 montre comment on peut trouver l'image d'un premier arbre à partir des images du deuxième et des suivants en se basant sur la méthode de la Fig. 71.



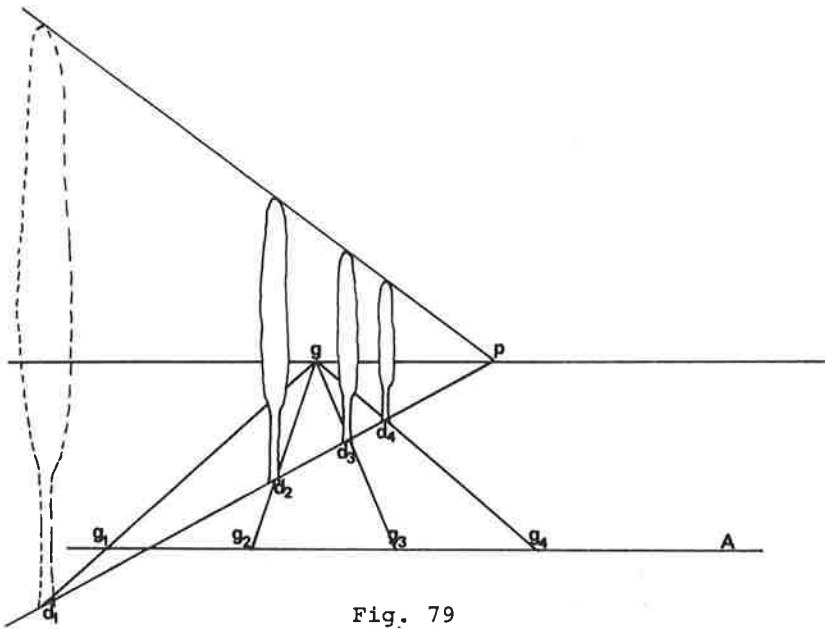


Fig. 79

Pour que l'image du premier arbre soit à l'infini sur le bord de la route, il faut que  $g g_1$  soit parallèle à  $p d_2$ . Pour trouver la position du troisième arbre et des suivants qui répondent au problème, il faut donc trouver sur la droite A le point  $g_1$  tel que  $g g_1$  soit parallèle à la ligne  $p d_2$  des arbres; puis trouver les points  $g_3, g_4 \dots$  tels que  $|g_1 g_2| = |g_2 g_3| \dots$ ; et enfin, trouver l'emplacement des arbres grâce à ces points  $g_3, g_4 \dots$  (Fig. 80).

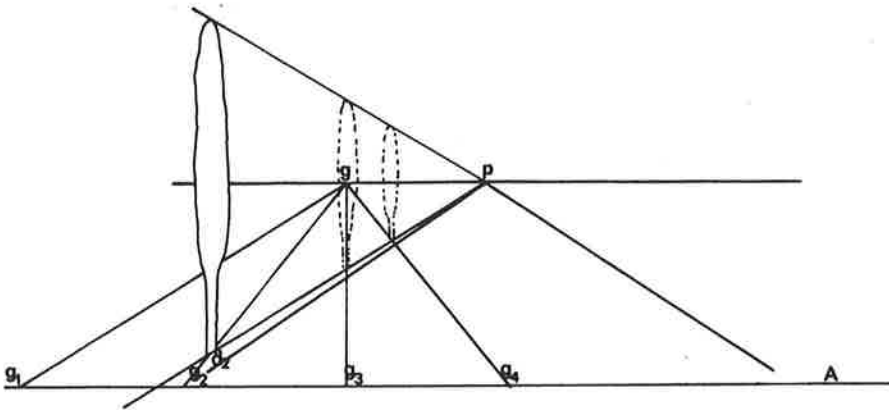


Fig. 80

La Fig. 81 montre une autre façon de trouver l'image d'un premier arbre à partir des images du deuxième et des suivants en se basant sur la méthode de la Fig. 74. La solution du problème basée sur cette méthode met en évidence une caractéristique plus frappante du tableau demandé.

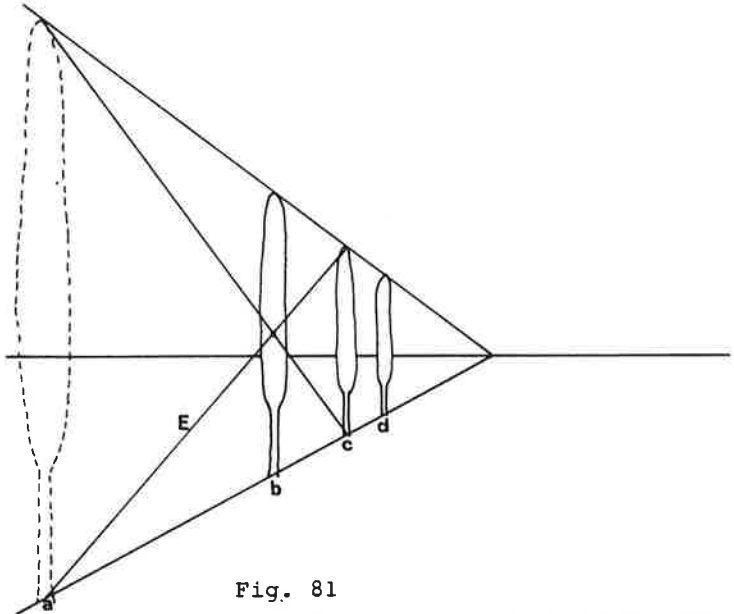


Fig. 81

Pour que le premier arbre ait son image à l'infini, il faut que le segment E passant par le sommet du troisième arbre et le milieu du deuxième soit parallèle à la ligne des pieds des arbres comme à la Fig. 82. Il faut donc que l'image du troisième arbre soit deux fois plus petite que celle du deuxième.

On peut aussi appliquer la méthode de la Fig. 67 comme indiqué à la Fig. 83. Il n'est alors plus nécessaire de parler de point à l'infini.

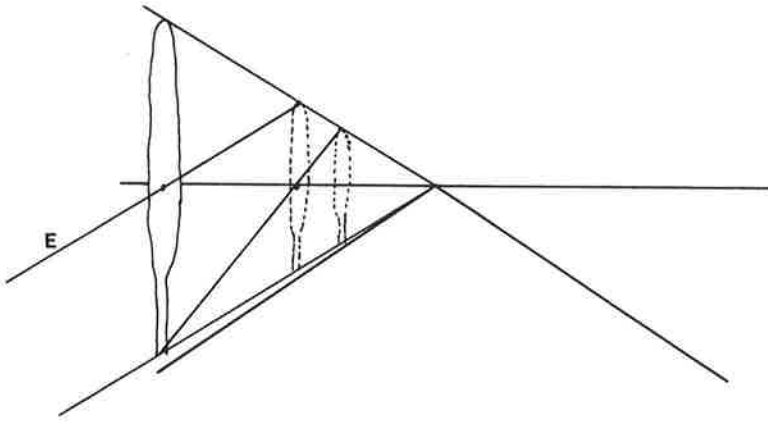


Fig. 82

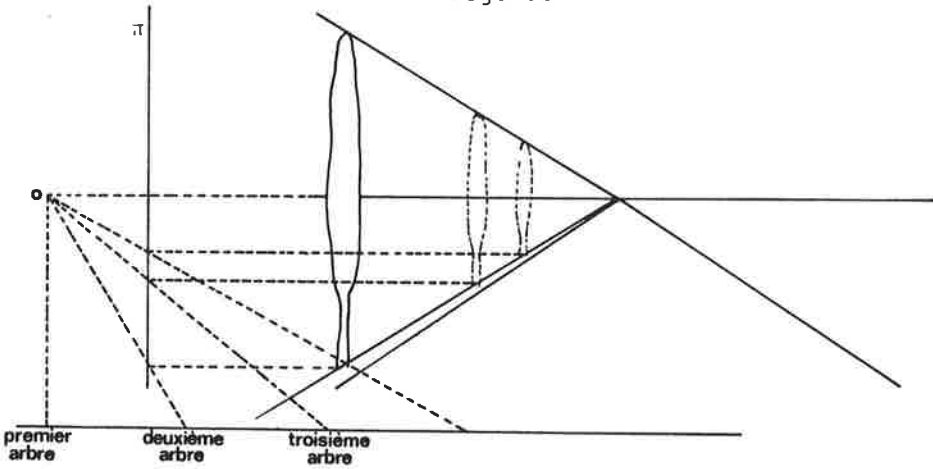


Fig. 83

Suite géométrique ou non ?

La suite des distances des images des arbres au point de fuite de la route est-elle une suite géométrique ? Cela semble plausible puisqu'une telle suite est infinie et que sa limite vaut 0 (Appendice 5). Mais la solution de "deux dessins pour la même route" montre que ce n'est pas le cas. En effet, si la suite des distances  $|p a_0|$ ,  $|p a_1|$ ,  $|p a_2|$ , ... (Fig. 84) était une suite géométrique, la partie du milieu

de tableau (Fig. 86) et le reste du tableau (Fig. 85) seraient homothétiques (Appendice 4). Or la Fig. 86 correspond à la Fig. 62 : elle est dessinée d'un point de vue éloigné du premier arbre. Tandis que la Fig. 85 correspond à la Fig. 61 : elle est dessinée d'un point de vue proche du premier arbre. Et ces deux figures ne sont visiblement pas semblables.

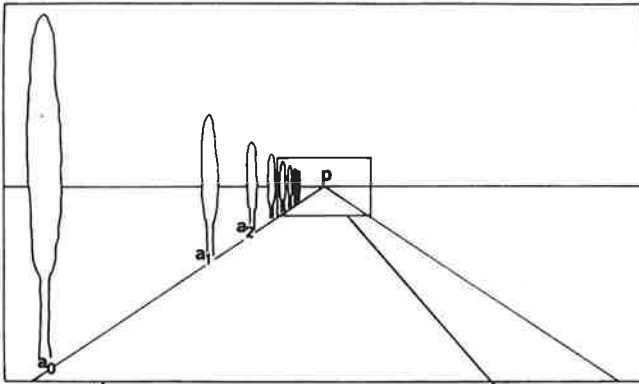


Fig. 84

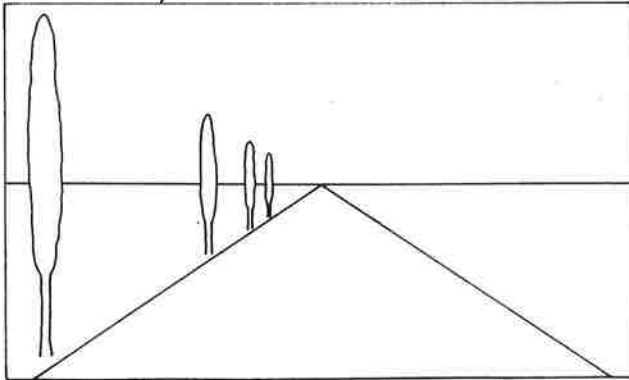


Fig. 85

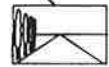


Fig. 86

Alors, quelle suite les longueurs  $|p a_i|$  forment-elles ?

Nous savons, par le théorème de Thalès, que la suite des  $|p a_i|$  est proportionnelle à celle des  $|p b_i|$  (Fig. 87).

Donc si nous établissons la suite des  $|p b_i|$ , il suffira de

la multiplier par  $\frac{|p a_0|}{|p b_0|}$  pour obtenir celle des  $|p a_i|$ .

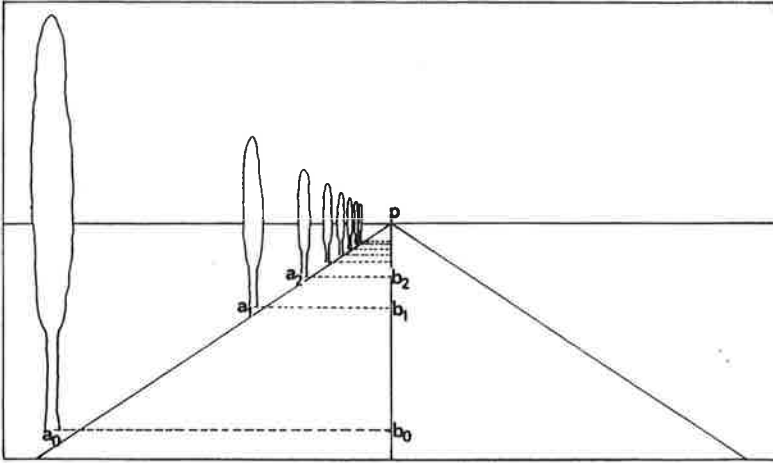


Fig. 87

Représentons la situation de côté (Fig. 88).

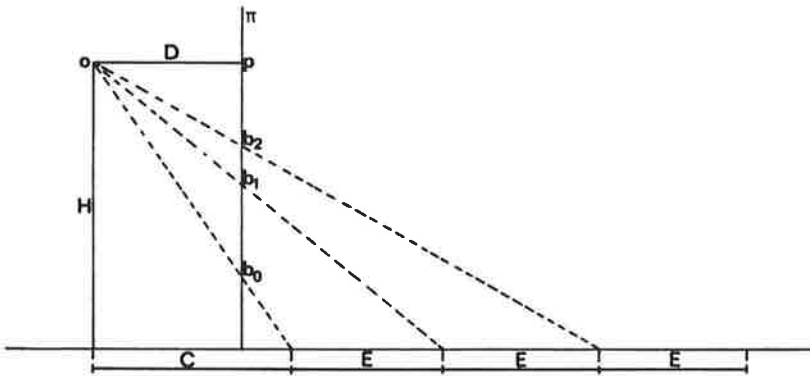


Fig. 88

Grâce aux relations dans les triangles semblables on obtient

$$|p b_0| = \frac{D.H}{C} ,$$

$$|p b_1| = \frac{D.H}{C + E} ,$$

$$|p b_2| = \frac{D.H}{C + 2E} ,$$

et ainsi de suite. D'où, pour  $i$  valant successivement 0, 1, 2, 3, ..., on a

$$|p b_i| = \frac{D.H}{C + iE} .$$

On appelle cette suite une *suite homographique* (parce qu'elle est de la forme  $\frac{F.i + G}{K.i + L}$  avec F, G, K, L constantes telles que  $FL - GK \neq 0$ ).

Remarquons que si le dessinateur se trouve à côté du premier arbre comme dans le problème "Et quand le dessinateur...",

alors  $C = 0$  et  $|p b_i| = \frac{D \cdot H}{i \cdot E}$ .

## 2. LES CARRELAGES

### Est-ce correct ?

Dans les Fig. 43, 89 et 90, la représentation des carrelages est-elle tout-à-fait en accord avec les lois de la perspective ?

Si le carrelage de la Fig. 90 est composé de carrés identiques, d'où exactement faut-il regarder la photo pour qu'elle paraisse réaliste ?



Fig. 89

*Création des astres* tirée du *retable de Grabow* du Maître Bertram de Minden, Hambourg, Kunsthalle, 1379.



Fig. 90  
Stephan Hender, Thira, Grèce.

Pistes. Pour chacune des figures, tracez les diagonales des carrelages.

Pour la Fig. 90, à quelle distance du point de fuite principal se situe les points de fuite des diagonales ?

L'échiquier

La Fig. 91 représente un carré en perspective; complétez-la pour en faire un échiquier.

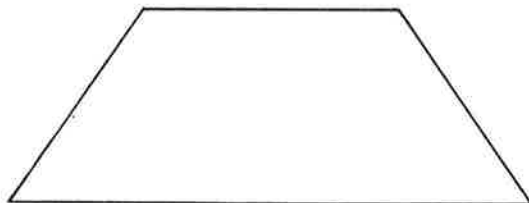


Fig. 91

Carreler une pièce

Pavez le sol de la pièce suivante (Fig. 92) à l'aide de carrés. (La distance D du point de vue au tableau est donnée.)

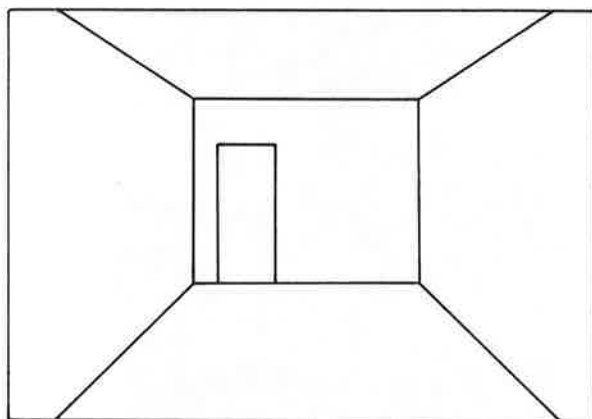


Fig. 92

Piste. Dessinez d'abord un pavage de rectangles puis "ajustez" le point de fuite des diagonales pour que ce soit un pavage de carrés.

Et quand le rectangle est de travers ?

Dans le problème précédent, le rectangle à paver avait un côté parallèle au tableau. Pour aller plus loin dans la technique du dessin en perspective, nous vous proposons de quadriller le sol d'une pièce "de travers" par rapport au tableau. La Fig. 93 représente le sol de cette pièce rectangulaire. (Le point p est donné.)

N.B. : Nous ne demandons pas, du moins dans un premier temps, que le rectangle contienne uniquement des carrés entiers. Vous pouvez, après avoir résolu ce problème, reprendre son énoncé en ajoutant cette condition.



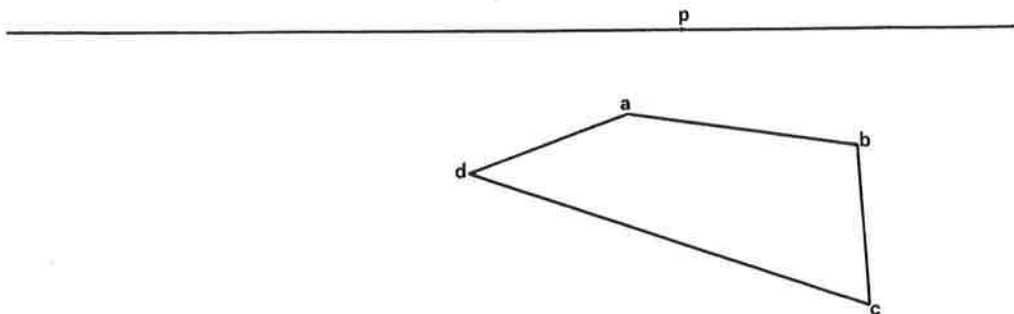


Fig. 93

Pistes. Tracez les lignes parallèles à ad et délimitant les rangées de carrés, en divisant ab en parties égales.

Quelle caractéristique a le point de vue o du dessin par rapport aux points de fuite,  $f_1$  et  $f_2$ , des droites perpendiculaires cd et cb ? A l'aide du point p, trouvez l'emplacement exact du point o.

Construisez, à partir du point o, le point de fuite,  $f_3$ , de la droite bissectrice de l'angle bcd (diagonale des carrés). Pour plus de facilité, vous pouvez rabattre le point o sur la feuille par une rotation autour de la ligne d'horizon.

Tracez la diagonale du carrelage passant par a et à l'aide de ses points d'intersection avec les lignes parallèles à ad, tracez les lignes parallèles à ab.

Est-ce correct ? Solution.

A propos de l'Annonciation. Comme nous l'avons déjà remarqué au Chap. 2, Section 4, les perpendiculaires au tableau fuient bien vers un même point. Par contre, si on suppose que tous les rectangles (ou carrés) sont identiques, l'écart entre les parallèles au tableau n'est pas en accord avec les lois de la perspective. On peut s'en rendre compte en voyant que les diagonales du carrelage ne sont pas droites.

A propos de la *Création des astres*. La représentation du pavement, dans ce tableau pourtant postérieur à l'*Annonciation*, ne répond pas du tout aux lois de la perspective et on se demande comment Maître Bertram de Minden aurait dessiné la partie centrale du carrelage s'il ne l'avait pas cachée "par un pied posé là comme par hasard ou par le pan d'un vêtement disposé là avec un raffinement aussi cocasse que transparent" (E. Panofsky, 1975).

A propos de *Thira*. Les perpendiculaires au plan de la photo convergent bien vers un même point  $p$  et on peut voir que le carrelage est correctement représenté en traçant quelques diagonales. On peut aussi en être convaincu sans faire aucun tracé si l'on sait que la photographie est basée sur le principe de la projection centrale (cf. Chap. 5, Section 4) et répond donc automatiquement aux lois de la perspective.

Recherche du point de vue de la photo. Cherchons le point de fuite  $f$  des diagonales des carrés (Fig. 94); elles forment un angle de  $45^\circ$  avec les droites perpendiculaires au plan de la photo. Nous savons par le Chap. 2, Section 5 que le point  $f$  se trouve à la distance  $D$  (distance de l'oeil au plan de la photo) du point  $p$ . Le point de vue se trouve donc sur la perpendiculaire au plan de la photo au point  $p$ , à la distance  $|pf|$  de la photo.

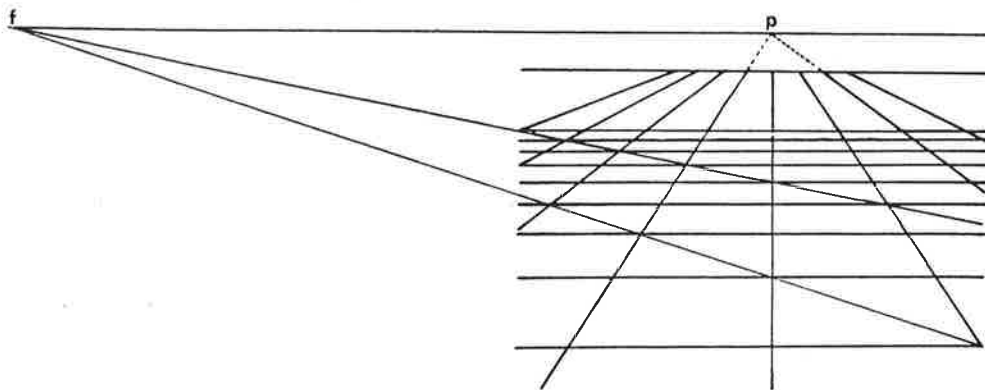


Fig. 94

Remarques : 1) Nous avons supposé que le plan de la photo était perpendiculaire au plan horizontal.

2) Les transversales sont parallèles sur la photo; dans la réalité, elles sont donc parallèles au plan de la photo. Donc les droites fuyantes sont bien perpendiculaires au plan de la photo et leur point de fuite est bien le point principal p.

L'échiquier. Solution.

Pour construire l'échiquier, nous divisons le côté avant du carré en huit parties égales<sup>11</sup> à partir des points ainsi trouvés, nous traçons les lignes perpendiculaires à ce côté à l'aide du point p (Fig. 95). Ensuite, nous traçons une diagonale du carré; les points d'intersection de cette diagonale et des lignes déjà tracées déterminent l'emplacement des lignes parallèles au côté avant du carré appelées les *transversales*.

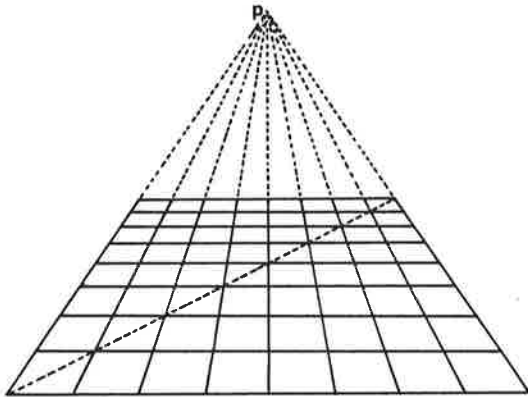


Fig. 95

<sup>11</sup> La justification de la division des transversales par cette méthode peut se trouver p. 50-51.

Carreler une pièce. Solution.

Commençons par tracer les lignes perpendiculaires au tableau, délimitant des rangées de carrés (Fig. 96). Pour cela, nous divisons le segment [ab] par le nombre choisi de rangées et nous traçons à partir des points ainsi trouvés les segments fuyant vers le point de fuite p trouvé grâce aux arêtes de la pièce.

*Supposons que nous voulions simplement un pavage de rectangles identiques.*

Nous pouvons alors tracer une première transversale qui donnera la première rangée de rectangles. Pour trouver la deuxième et les suivantes, nous prolongeons la diagonale d'un rectangle déjà tracé; les points d'intersection de cette diagonale et des droites fuyant vers le point p déterminent l'emplacement des autres transversales.

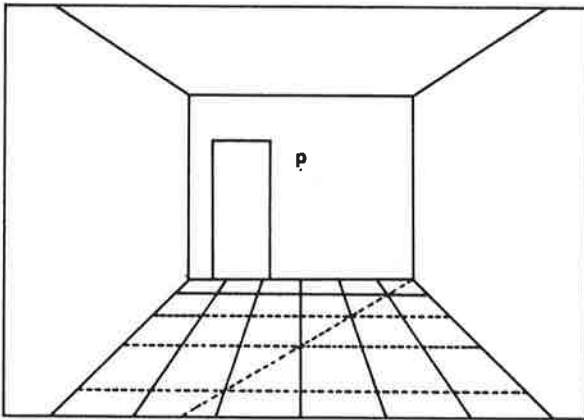


Fig. 96

*Mais nous voulons un pavage de carrés.*

Les diagonales du carrelage ne sont donc pas quelconques : elles font un angle de  $45^\circ$  avec le plan du tableau. Nous avons vu au Chap. 2, Section 5 que les points de fuite de ces droites se trouvent à la distance D du point p, sur la ligne d'horizon. Il suffit d'en tracer une ou deux et de compléter le dessin de la même manière que pour un pavage de rectangles (Fig. 97).

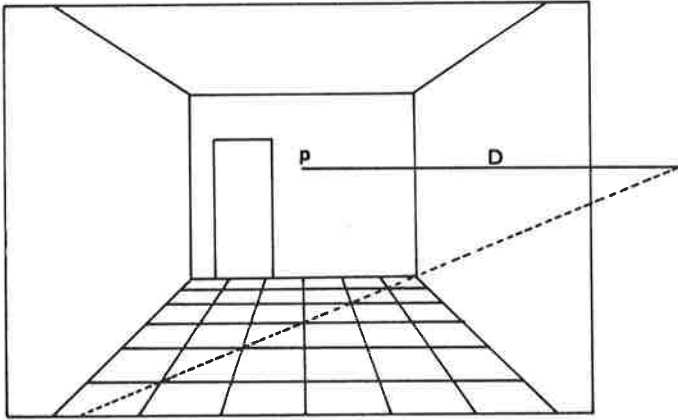


Fig. 97

#### D'un point de vue historique

La représentation des carrelages a été une préoccupation importante pour de nombreux peintres. "A en croire L.B. Alberti, cité par E. Panofsky (1975), on voyait encore à son époque (1436) sévir l'habitude fallacieuse qui consistait à réduire mécaniquement chacune des bandes du carrelage d'un tiers par rapport à la précédente".

Voyons maintenant la méthode correcte proposée par Alberti lui-même (cf. L.B. Alberti, 1436). Le quadrillage à représenter en perspective est donné en vraie grandeur à la Fig. 98. Alberti dessine d'abord en perspective les lignes perpendiculaires au tableau, partant de a, b, c, d et e (Fig. 99). Puis il représente la situation de côté et trouve ainsi les intervalles entre les transversales fm, gl, hk et ij (Fig. 100) qu'il reporte sur le dessin de départ comme indiqué à la Fig. 101 reprenant toute la construction.

Le procédé de la diagonale, représenté à la Fig. 97 est dû à Jean Pélerin dit Viator (peintre français du 16<sup>e</sup> siècle).

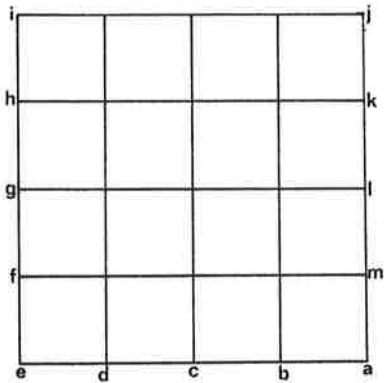


Fig. 98

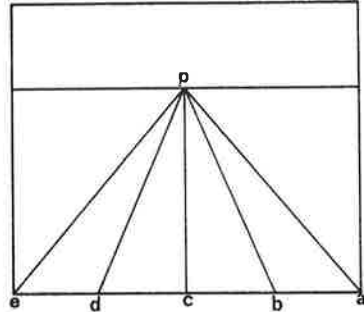


Fig. 99

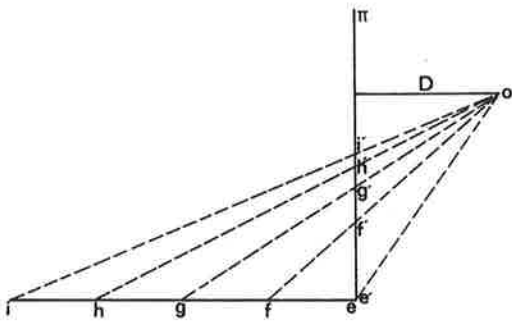


Fig. 100

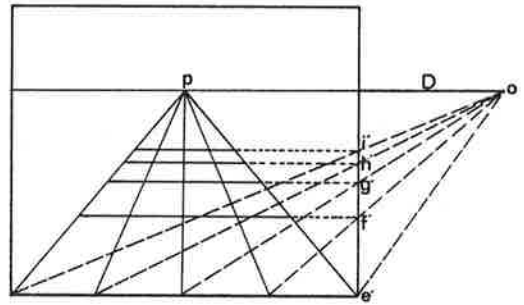


Fig. 101

Les méthodes d'Alberti et de Viator donnent le même résultat. En effet, on a prouvé qu'elle permettent toutes deux d'obtenir un dessin correct de l'échiquier en perspective. Mais on peut aussi prouver leur équivalence en considérant les Fig. 97 et 101 uniquement comme des figures planes (sans donner de signification à ce qu'elles représentent). Nous vous laissons la possibilité de faire la démonstration.

Le problème ci-dessous permet de prolonger la réflexion sur les quadrillages et la perspective.

La Fig. 102 représente la première rangée de carrés d'un couloir infini. Qu'obtiendrait-on si on dessinait une infinité de rangées de carrés en appliquant le principe de réduction de "chacune des bandes de carrelage d'un tiers par rapport

à la précédente", dénoncé par Alberti ?

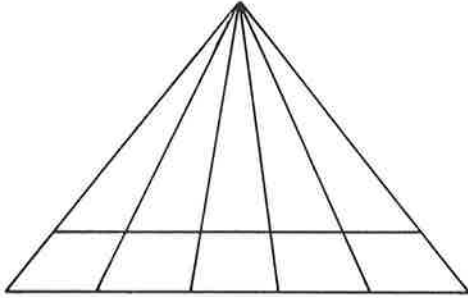


Fig. 102

Après avoir tracé une dizaine de transversales (Fig. 103), on se demande si une infinité de rangées dessinées de cette façon remplirait exactement le couloir représenté par le grand triangle.

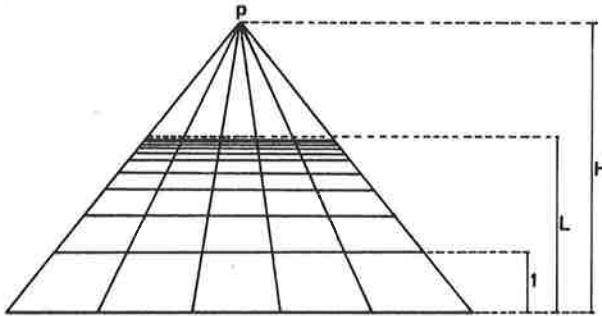


Fig. 103

Prenons comme unité de longueur l'intervalle entre les deux premières transversales et notons L la longueur de la partie du couloir qui serait pavée si nous avions tracé une infinité de transversales.

Nous obtenons

$$L = 1 + 2/3 + (2/3)^2 + (2/3)^3 + (2/3)^4 + \dots \quad (1)$$

ou

$$\begin{aligned} L - 1 &= 2/3 + (2/3)^2 + (2/3)^3 + (2/3)^4 + \dots \\ &= 2/3 (1 + 2/3 + (2/3)^2 + (2/3)^3 + \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

En utilisant (1) pour réécrire le deuxième membre de l'égalité (2), nous obtenons

$$L - 1 = 2/3 \cdot L$$

ou

$$(1 - 2/3)L = 1$$

ou encore

$$L = 3$$

Or, dans le cas de la Fig. 103, on voit que H est plus grand que 3. Le couloir ne serait donc pas entièrement pavé même si l'on traçait une infinité de transversales.

Mais est-il bien légitime, dans le calcul ci-dessus, de travailler avec L, valeur supposée d'une somme infinie (quelle chose énorme !), sans trop savoir si cette valeur existe, si elle est un nombre fini ? Examinons un autre cas pour éprouver la méthode. Pour cela, remplaçons, par exemple, 2/3 par 2.

Nous obtenons

$$\begin{aligned} L' &= 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots, \\ L' - 1 &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots, \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots), \\ &= 2 \cdot L', \\ (1 - 2) L' &= 1, \end{aligned}$$

d'où

$$L' = -1$$

Pourtant L' est une somme infinie de nombres positifs et il est bien difficile d'accepter qu'elle soit un nombre négatif.

Montrons que ce raisonnement n'est valide que si L (ou L') est un nombre fini; montrons aussi que L est fini, tandis que L' ne l'est pas.

Considérons la suite des nombres

$$\begin{aligned} &1, \\ &1 + a, \\ &1 + a + a^2, \\ &1 + a + a^2 + a^3, \\ &\dots \end{aligned}$$



où  $a$  est un nombre réel positif. Le  $n^{\text{ème}}$  terme de cette suite est

$$L_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} L_n - 1 &= a + a^2 + a^3 + \dots + a^n, \\ &= a \cdot (1 + a + a^2 + a^{n-1} + a^n) - a^{n+1}, \\ &= a \cdot L_n - a^{n+1}, \end{aligned}$$

$$(1 - a) L_n = 1 - a^{n+1},$$

d'où

$$L_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \text{ si } a \neq 1.$$

Si  $a = 1$ , alors

$$L_n = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = n + 1.$$

Quand  $n$  tend vers l'infini, si  $a = 1$ ,  $L_n$  tend aussi vers l'infini; si  $a < 1$ ,  $a^{n+1}$  tend vers 0, donc  $L_n$  tend vers

$\frac{1}{1 - a}$ ; si  $a > 1$ ,  $a^{n+1}$  tend vers l'infini et  $L_n$  tend vers l'infini.

Donc pour  $a = 2/3$ , on a

$$L = \frac{1}{1 - 2/3} = 3$$

et pour  $a = 2$ ,  $L$  est infini.

Et quand le rectangle est de travers ? Solution.

Reprenons en l'adaptant le schéma de la solution du problème précédent.

*Tracer les lignes parallèles à  $ad$  et délimitant les rangées de carrés, en divisant  $ab$  en parties égales.*

Cherchons d'abord le point de fuite  $f_1$  de  $ad$  et  $bc$ , et celui  $f_2$ , de  $ab$  et  $dc$  (Fig. 104).

Pour diviser  $ab$  en parties égales, nous appliquons comme suit la méthode de la Fig. 71. Traçons A une droite horizontale (parallèle au bord inférieur de la feuille) et choisissons  $f_1$  comme point de fuite des parallèles qui serviront à diviser  $ab$  en parties égales. Les parallèles passant par  $a$  et  $b$  et fuyant vers  $f_1$  coupent A en  $e$  et  $g$  (Fig. 104). Nous divisons alors le segment  $[eg]$  en parties égales sur le tableau et par les points ainsi trouvés, nous traçons les parallèles à  $ad$  qui coupent les côtés représentés par  $ab$  et  $dc$  en parties égales et qui délimitent les rangées de carrés.

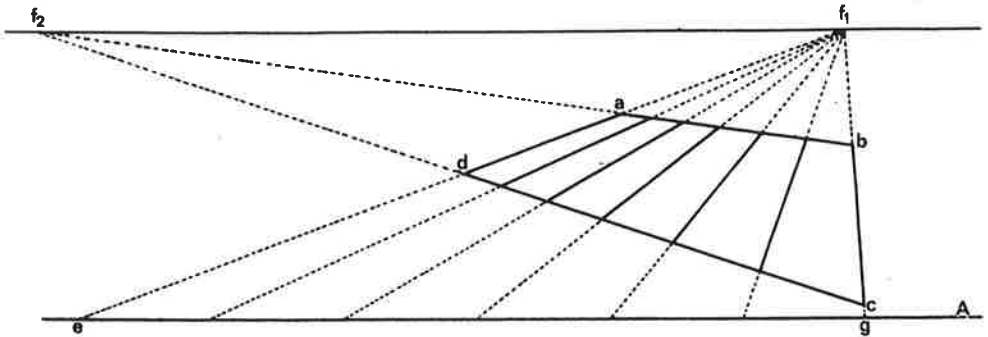


Fig. 104

*Tracer une des diagonales des carrés, c'est-à-dire une droite faisant un angle de  $45^\circ$  avec  $ab$  et  $ad$ .*

Etant donné que le point de fuite d'une droite détermine sa direction, le problème revient à chercher le point de fuite des droites faisant un angle de  $45^\circ$  avec  $ab$  et  $ad$ .

Pour cela, commençons par chercher la position du point  $o$  à partir des points  $p$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .

Imaginons une situation avec un rectangle  $abcd$ , un tableau et un point de vue  $o$  et dessinons-la vue du dessus (Fig. 105).

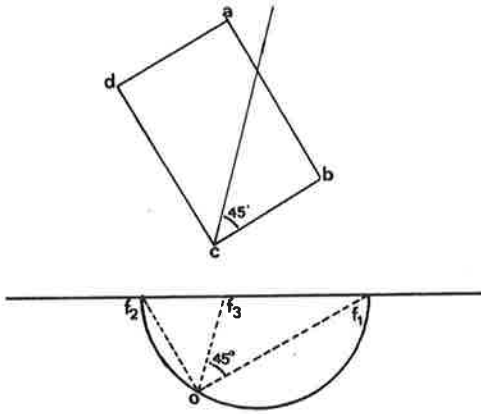


Fig. 105

Puisque le point de fuite  $f_1$  est l'image du point à l'infini des droites  $bc$  et  $ad$ ,  $of_1$  est parallèle à  $cb$ . De même,  $of_2$  est parallèle à  $cd$ . Et puisque l'angle  $bcd$  vaut  $90^\circ$ , l'angle  $f_1of_2$  vaut également  $90^\circ$ .

Le point  $o$  est donc sur le demi-cercle horizontal de diamètre  $f_1 f_2$  (Appendice 2). Et puisque  $p$  est la projection orthogonale de  $o$  sur le tableau, nous pouvons retrouver la position exacte de  $o$  à partir de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $p$  comme le montre la Fig. 106 représentant le plan  $of_1f_2$  en vue du dessus.

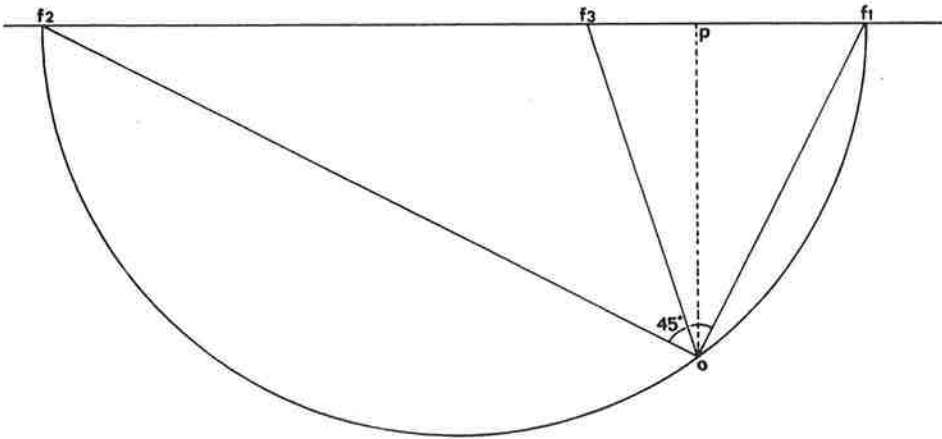


Fig. 106

Nous pouvons à partir de là déterminer la position du point de fuite  $f_3$  des droites horizontales faisant un angle de  $45^\circ$  avec  $ab$  et  $ad$ . En effet, traçons sur la Fig. 105 le point de fuite  $f_3$  des droites à  $45^\circ$  de  $ab$ . L'angle  $f_1of_3$  vaut  $45^\circ$ .

Nous pouvons trouver  $f_3$  par construction sur la Fig. 106. Sur la Fig. 107, nous avons rabattu la construction de la Fig. 106 sur le plan du tableau par une rotation de  $90^\circ$  autour de la ligne d'horizon. Grâce au point de fuite  $f_3$ , nous pouvons alors tracer une droite  $E$  passant par  $a$  et faisant un angle de  $45^\circ$  avec  $ab$  et  $ad$ .

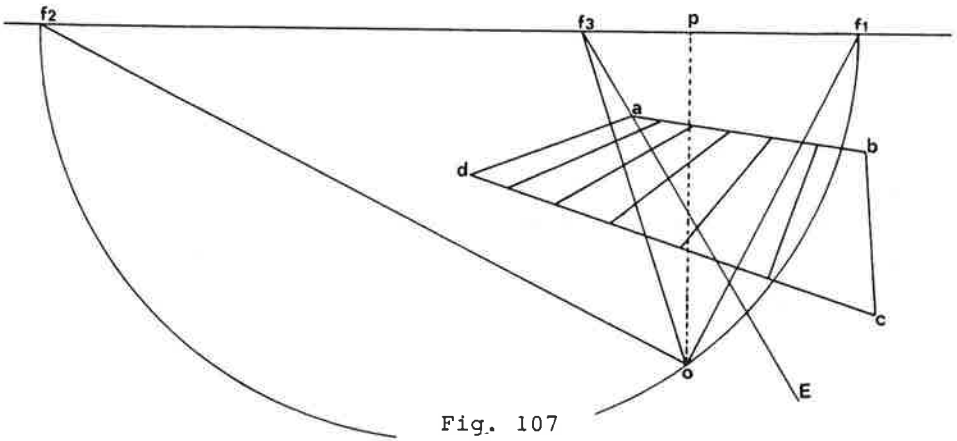


Fig. 107

Tracer les lignes parallèles à  $ab$  grâce aux points d'intersection de la diagonale  $E$  avec les lignes parallèles à  $ad$  (Fig. 108).

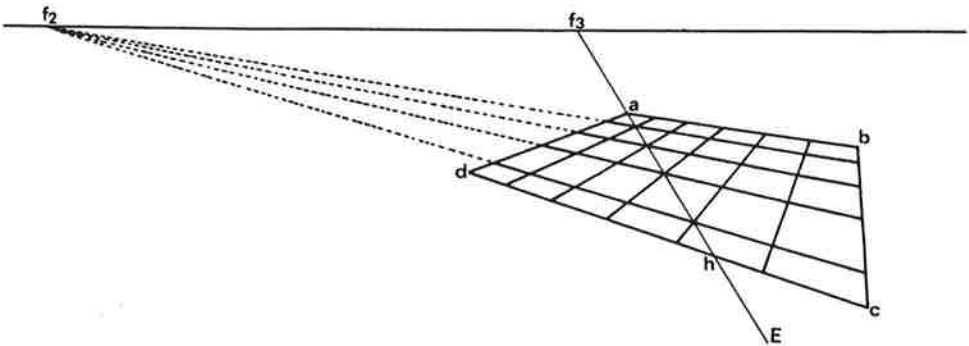


Fig. 108

Sur la Fig. 108, les carrés du carrelage ne sont pas tous entiers. Si nous ajoutons à l'énoncé du problème l'exigence de paver le rectangle à l'aide de carrés entiers, il faut commencer par trouver une mesure allant un nombre entier de fois dans la largeur et dans la longueur. Pour cela, il faut connaître le rapport entre ces deux dimensions.

Avant de chercher celui-ci, remarquons qu'il doit être rationnel pour que le problème soit soluble (cf. F. Thomas-Van Dieren, N. Rouche, 1985).

Sur la Fig. 108, la droite E coupe dc en un point h tel que les segments réels représentés par dh et ad sont de même longueur. Le rapport des longueurs des segments représentés par dc et dh nous donnera donc le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle.

Or nous pouvons connaître ce rapport en appliquant de nouveau la méthode de la Fig. 71. Traçons une droite horizontale A et choisissons  $f_3$  comme point de fuite des parallèles passant par d, h et c qui nous servirons à établir le rapport (Fig. 109). Ces parallèles coupent A en trois points i, j, k tels que  $\frac{ik}{ij}$  est le rapport cherché.

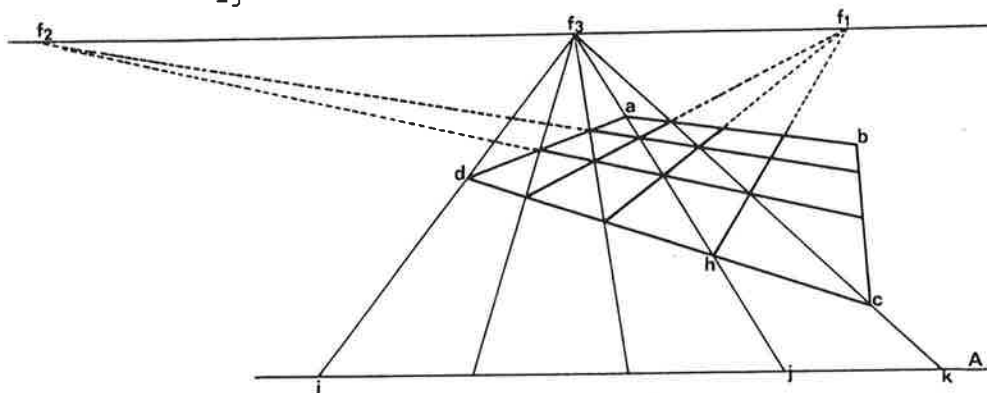


Fig. 109

Dans le cas présent, le rapport entre la largeur et la longueur est  $3/4$ . Nous pouvons donc, par exemple, diviser la longueur par 4 et la largeur par 3 pour obtenir un pavage de carrés identiques et entiers.

Là où le problème de carrelage fournit une solution au problème du troisième arbre.

Dans la Section 1, nous avons envisagé plusieurs manières de résoudre le problème du troisième arbre. En voici une autre, basée sur les représentations de carrelages.

On peut considérer la route comme un couloir qu'on va paver de rectangles comme indiqué à la Fig. 110. Nous pouvons alors trouver le troisième arbre en prolongeant la diagonale d'un rectangle de la première rangée.

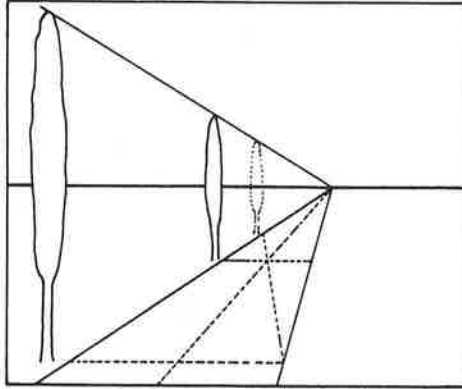


Fig. 110

Suite homothétique ou non ?

La suite des carreaux d'une même rangée (perpendiculaire au tableau) n'est pas homothétique (cf. Appendice 4) sur un dessin en perspective. Pour prouver cela, nous avons deux arguments :

D'abord, si elle l'était, il y aurait une homothétie de centre  $p$  (Fig. 111) qui transformerait  $[a_0b_0]$  en  $[a_1b_1]$ ,  $[a_1b_1]$  en  $[a_2b_2]$ , etc. La suite  $|pa_0|$ ,  $|pa_1|$ ,  $|pa_2|$ , ... serait donc géométrique. En effet, le rapport  $\frac{|pa_{i+1}|}{|pa_i|}$  serait

constant et égal au rapport de l'homothétie. Or nous avons vu à la Section 1 que cette suite n'était pas géométrique mais homographique.

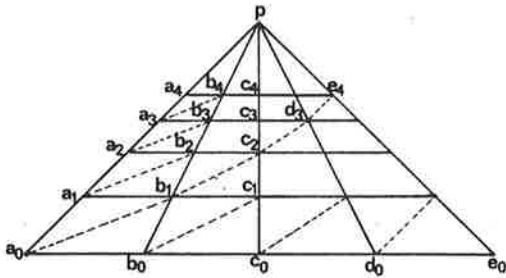


Fig. 111

De plus, si les carreaux  $a_0 b_0 b_1 a_1, a_1 b_1 b_2 a_2, \dots$  d'une même rangée étaient homothétiques, leurs diagonales respectives,  $a_0 b_1, a_1 b_2, \dots$ , seraient parallèles. En effet, une homothétie transforme une droite (ici,  $a_0 b_1$ ) en une droite (ici,  $a_1 b_2$ ) qui lui est parallèle. En outre, les droites  $a_0 b_1, b_0 c_1, c_0 d_1, \dots$  ne sont manifestement pas parallèles. Les diagonales du carrelage (par exemple,  $a_0 b_1 c_2 d_3 e_4$ ) seraient donc des lignes brisées. Or, comme nous l'avons vu plus haut, elles doivent être droites et fuir vers un point de la ligne d'horizon.

CHAPITRE 4

OMBRES ET REFLETS EN PERSPECTIVE



Guus Rijven, White Pass Railway, 1976.



1. OMBRES AU SOLEIL

L'ombre de la maison<sup>12</sup>.

Dessinez sur la Fig. 112 l'ombre de la maison au soleil (celui-ci est représenté par le point s).

s.

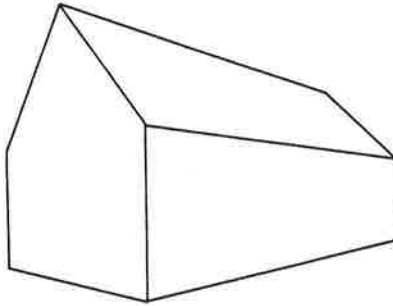


Fig. 112

Première piste. a) Tracez les ombres à la lampe des deux piquets de la Fig. 113.

Quel est le point de rencontre des deux ombres prolongées et pourquoi ?

---

<sup>12</sup> Ce problème nous a été communiqué par M. Soufflet.

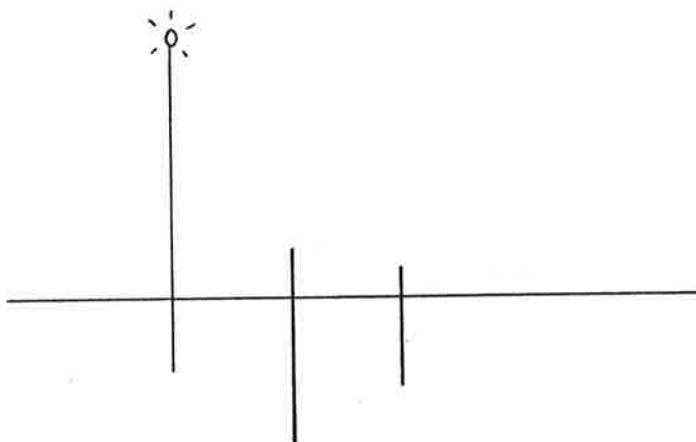


Fig. 113

b) Trouvez, de la même façon, le point de rencontre des ombres au soleil des arêtes verticales de la maison (considérées comme des piquets), sachant que *le soleil est très très loin* dans le ciel.

Deuxième piste. a) Si on considère que *le soleil est "à l'infini"* dans le ciel et que ses rayons sont parallèles, que représente alors le point *s* dans le langage de la perspective ?

b) Comment sont, dans la réalité, les ombres des arêtes verticales de la maison ? Quelle caractéristique ont-elles sur le dessin ?

c) Les arêtes verticales de la maison représentent avec les rayons lumineux qui les "touchent" des plans verticaux parallèles. Tracez leur ligne de fuite.

d) Les ombres des arêtes verticales sont à la fois dans le plan horizontal et dans les plans verticaux. Tracez-les à l'aide des deux lignes de fuite de ces plans, puis dessinez l'ombre de toute la maison.

Une ombre sur la maison.

Dessinez sur la Fig. 114 les ombres des poteaux et de la maison.

Quelle est la longueur de l'ombre (dessinée) du poteau

de l'avant-plan ? Quelle longueur a-t-elle dans la réalité (en comparaison avec la longueur des autres ombres) ? Pourquoi y a-t-il une telle différence entre sa longueur réelle et la longueur de sa représentation sur le tableau ?

9.

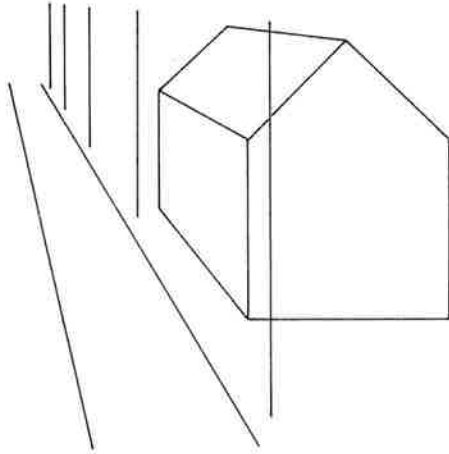


Fig. 114

Première piste. Un des poteaux a son ombre sur la maison.

Pour la partie sur le mur, utilisez le fait qu'une projection centrale (Chap. 2, Section 6) ou parallèle (Appendice 6) transforme une droite parallèle au plan de projection en une droite qui lui est parallèle.

Pour la partie de l'ombre sur le toit, tracez la ligne de fuite du plan du toit (Chap. 2, Section 5). L'ombre sur le toit a son point de fuite sur cette ligne. Appliquez le raisonnement fait pour les ombres à la lampe (Chap. 2, Section 1) et au soleil pour déterminer où se situe exactement ce point de fuite.

Deuxième piste pour trouver l'ombre du poteau sur la maison. Commençons par appeler le plan vertical formé par ce poteau et les rayons lumineux, *le plan de l'ombre*.

Tracez l'intersection de ce plan avec le plan horizontal. Elle coupe les deux murs visibles de la maison en deux points, a et b. A l'aide de ces deux points, trouvez deux points situés dans le plan de l'ombre et également dans le plan du toit. Ceux-ci déterminent l'intersection de ces deux plans dans laquelle est comprise l'ombre cherchée.

L'ombre de la maison. Solution.

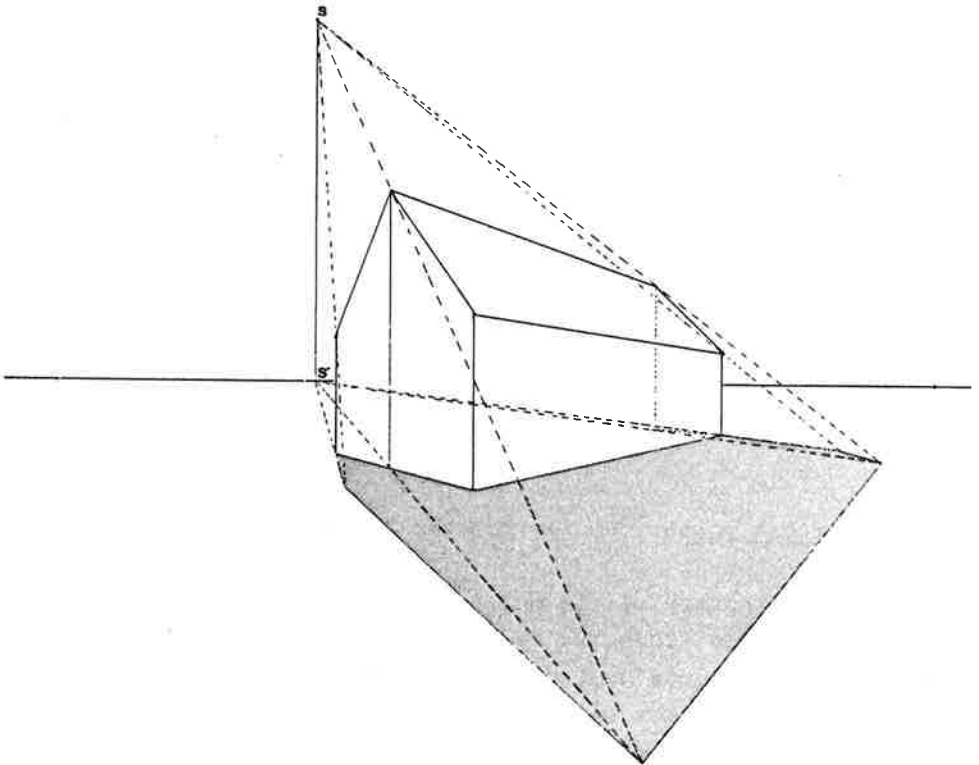


Fig. 115

Comme nous l'avons vu au Chap. 2, Section 1, l'ombre, sur un plan, d'un piquet éclairé par une lampe se prolonge en une droite passant par le pied de la lampe (Fig. 116). Ceci, bien entendu, si le lampadaire est vertical. Sinon, l'ombre prolongée passera par le point de projection parallèlement au piquet de la lampe sur le plan horizontal (cf. Chap.2, Section 1).

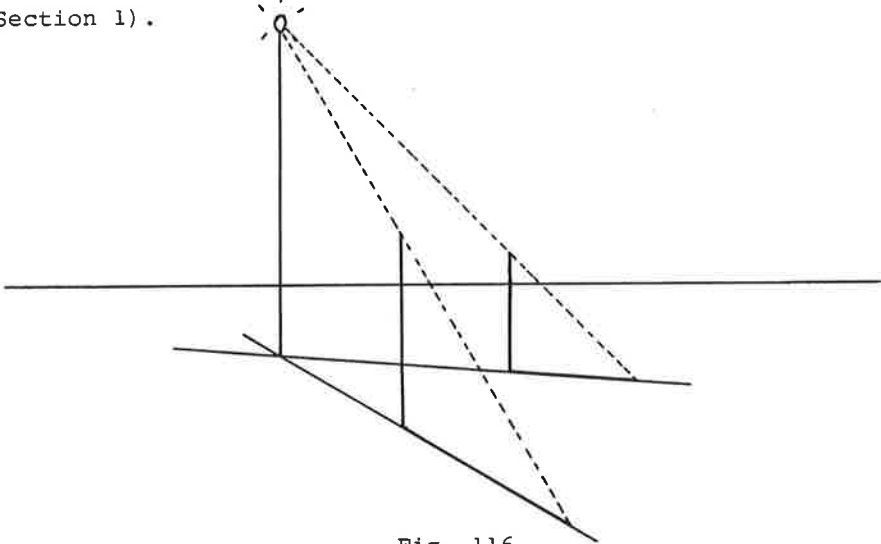


Fig. 116

Comme le soleil est *très très loin*, sa projection orthogonale est très très loin sur le plan horizontal et donc, sur le dessin, ce point est quasiment sur la ligne d'horizon.

Pour trouver l'ombre au soleil d'un piquet, il suffit donc de projeter le point *s* sur la ligne d'horizon, parallèlement au piquet (Fig. 117). La droite contenant l'ombre passe par le point *s'* trouvé. Ce point est en fait le point de fuite de l'ombre du piquet.

De même, les ombres des arêtes verticales de la maison ont pour point de fuite la projection verticale du point *s* sur la ligne d'horizon.

Pour trouver l'ombre des sommets de la maison, il suffit de les considérer comme sommets de segments verticaux. Le pied du segment correspondant au sommet arrière est sur la base du pignon arrière que l'on trace grâce au point de fuite des horizontales du pignon avant.

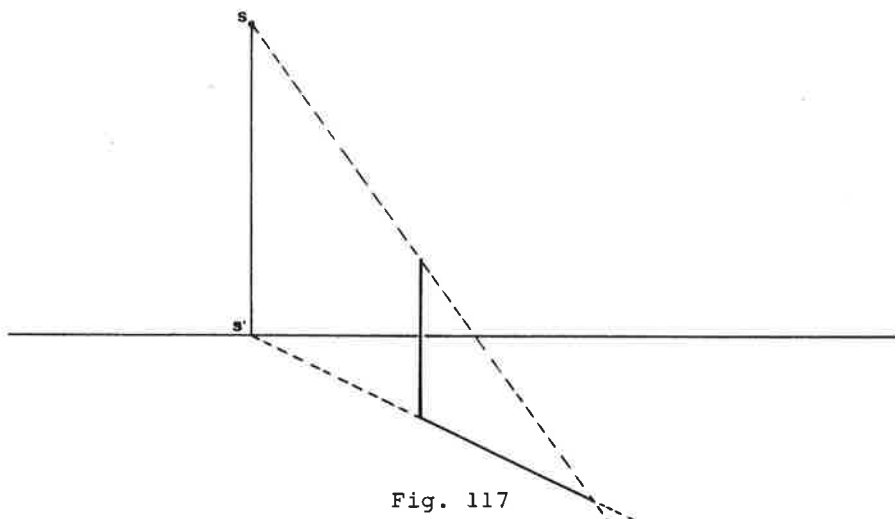


Fig. 117

On peut aussi expliquer cette solution en considérant que *le soleil est à l'infini*. Le point *s* représente alors le point de fuite des rayons lumineux.

Les ombres dues au soleil sont donc des images par une projection parallèle (Appendice 6). Puisque cette projection conserve la parallélisme, les ombres des arêtes verticales de la maison sont parallèles dans l'espace. Sur le dessin, elles ont donc un point de fuite sur la ligne d'horizon.

Ces ombres sont aussi dans les plans verticaux formés par les arêtes et les rayons lumineux qui les "touchent". Leur point de fuite est sur la ligne de fuite de ces plans. Celle-ci est verticale et passe par le point *s* (cf. Chap. 2, Section 5).

Dès lors, le point de fuite de ces ombres est à l'intersection des lignes de fuite verticale et horizontale.

#### Une ombre sur la maison. Solution.

Les ombres qui sont entièrement sur le sol peuvent se construire par la même méthode qu'au problème précédent.

Néanmoins, la demi-droite [*s'h* comprenant l'ombre du poteau de l'avant-plan et la demi-droite [*sg* passant par le sommet de ce poteau ne se rencontrent pas sur le dessin (Fig. 118).

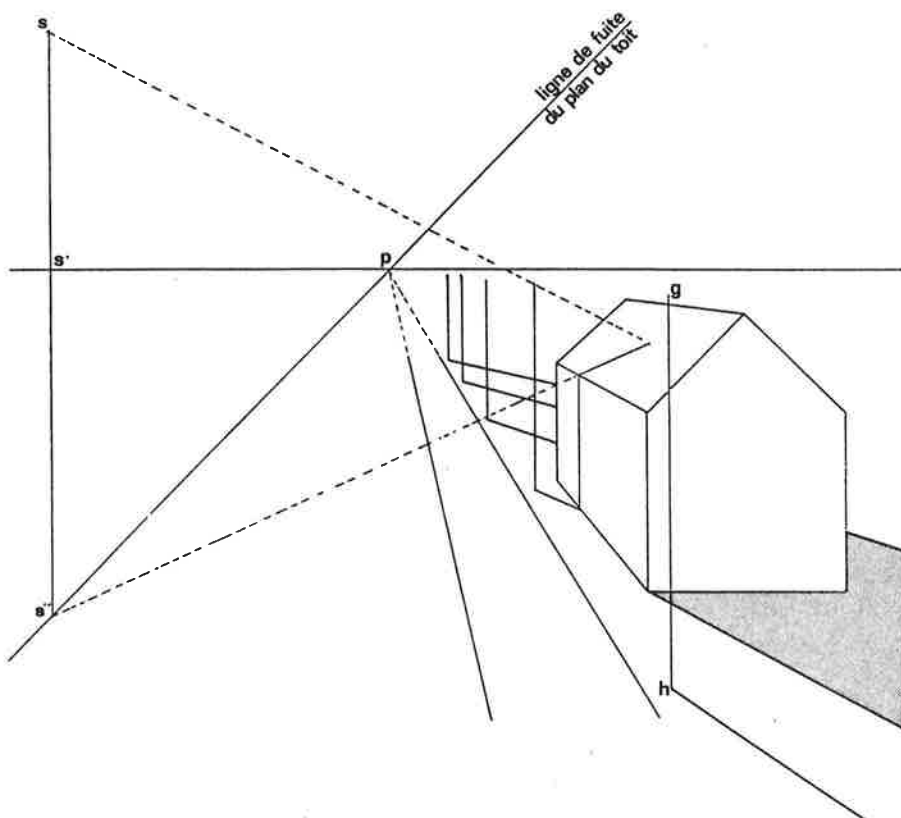


Fig. 118

Les droites  $s'h$  et  $sg$ , dans la réalité, ne se rencontrent donc pas dans le demi-espace situé devant le dessinateur; leur point d'intersection se situe derrière le dessinateur (Fig. 119).

L'ombre dessinée est donc infiniment longue alors que l'ombre réelle a la même grandeur que celle des autres poteaux.

Remarquons que si  $[sg$  et  $[s'h$  étaient parallèles sur le dessin, leur intersection dans la réalité se situerait dans le plan  $\pi_0$  passant par l'oeil et parallèle au tableau (cf. Chap. 2, Section 6).

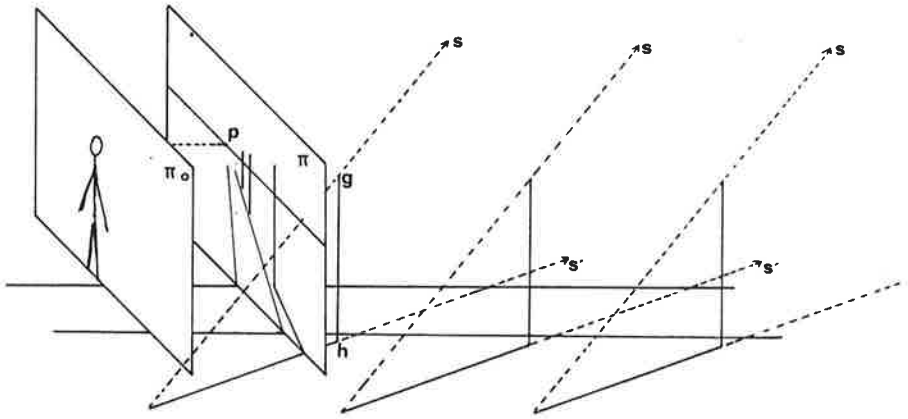


Fig. 119

L'ombre la plus difficile à trouver est celle du poteau situé près de la maison. Une partie seulement de cette ombre est sur le sol, le reste est sur la maison.

La partie sur le sol se trace comme l'ombre des autres poteaux grâce au point de fuite  $s'$ , projection verticale de  $s$  sur la ligne d'horizon.

Puis l'ombre continue sur le mur de la maison et verticalement, ce mur étant parallèle au poteau. En effet, les projections centrales (Chap. 2, Section 6) et parallèles (Appendice 6) transforment une droite parallèle au plan de projection en une droite qui lui est parallèle. De plus, le poteau et son ombre sur le mur sont parallèles au tableau; ils sont donc représentés par deux parallèles (cf. Chap. 2, Section 6).

La dernière partie de l'ombre est sur le toit de la maison. On peut la tracer à l'aide de son point de fuite qui doit se trouver sur la ligne de fuite du plan du toit. On trouve un des points,  $p$ , de cette ligne en prolongeant les bords horizontaux du toit. Les deux autres bords sont parallèles sur le dessin. La ligne de fuite est donc la droite passant par  $p$ , parallèle à ces deux bords (cf. Chap. 2, Section 5).



Cette droite étant tracée, il ne reste plus qu'à trouver le point de fuite,  $s''$ , de l'ombre en y projetant le point  $s$  parallèlement au poteau (Fig.118).

On peut aussi trouver l'ombre sur le toit de la manière suivante : la droite contenant l'ombre du poteau sur le sol est une droite qui coupe les deux murs visibles de la maison en deux points  $a$  et  $b$  (Fig. 120). A partir de ces deux points, traçons deux segments verticaux jusqu'aux points  $c$  et  $d$  du plan du toit. Ces segments étant entièrement dans le plan vertical, les points  $c$  et  $d$  déterminent l'intersection des deux plans (celui de l'ombre et celui du toit) dans laquelle est comprise l'ombre cherchée.

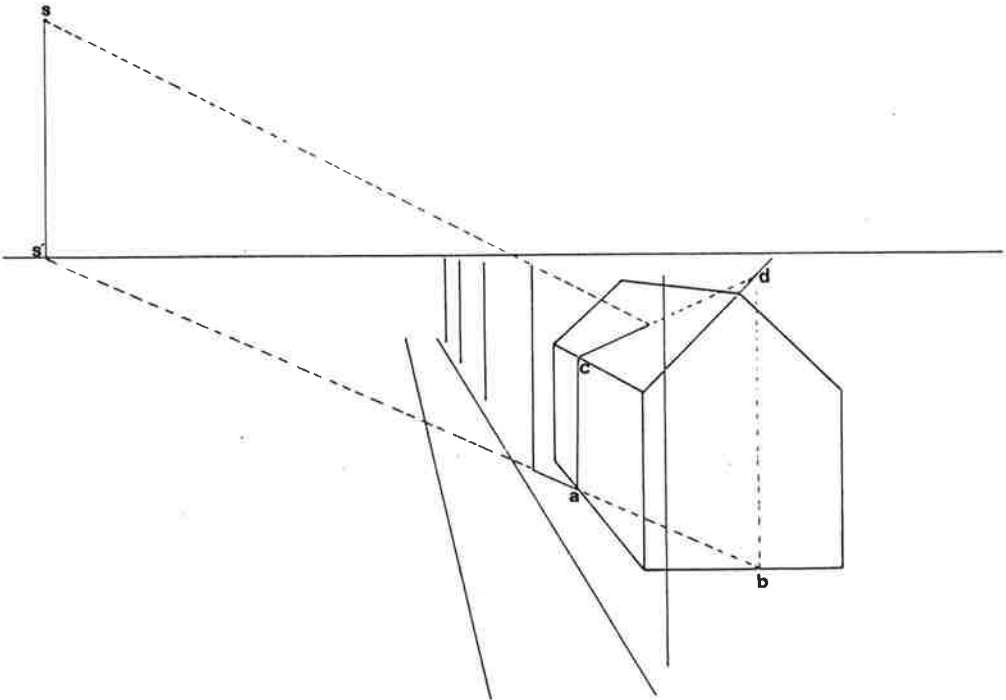


Fig. 120

## 2. OMBRES A LA LAMPE

### Ombre à la lampe et reflets dans l'eau.

Complétez le dessin de la Fig. 121 en ajoutant les reflets dans l'eau et l'ombre du personnage due au lampadaire.

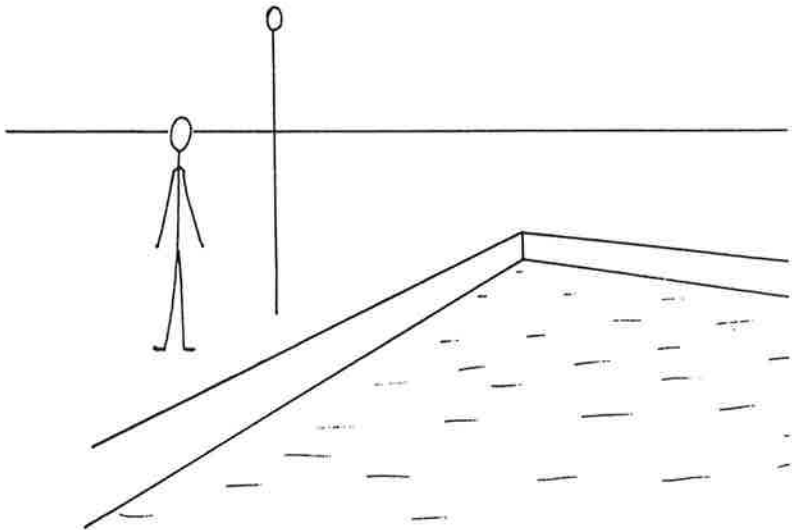


Fig. 121

### Où s'arrêtent les ombres ?

Dessinez l'ombre des arbres due au lampadaire (Fig. 122)<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> Le lampadaire peut être considéré comme une source ponctuelle de lumière.

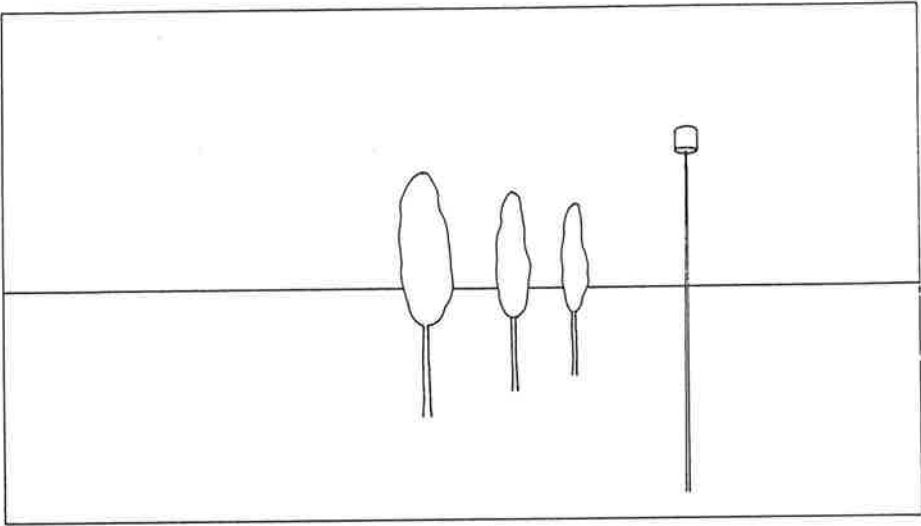


Fig. 122

Ombre à la lampe et reflets dans l'eau. Solution.

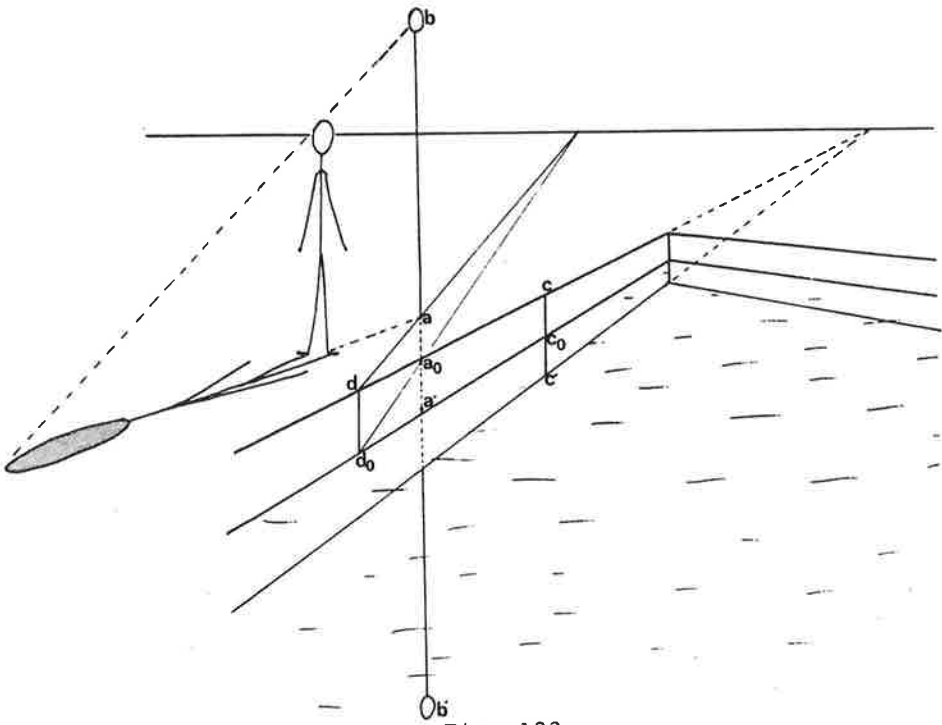


Fig. 123

L'ombre du personnage se trace à l'aide du pied du poteau comme nous l'avons vu au Chap. 2 Section 1 (Fig. 123).

Avant de tracer les reflets dans l'eau, essayons d'expliquer le phénomène lumineux qui les produit.

Lorsqu'un rayon lumineux vient frapper un miroir, il se brise<sup>14</sup> en restant dans le même plan perpendiculaire au miroir et en refaisant avec celui-ci le même angle (Fig. 124). On dit que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

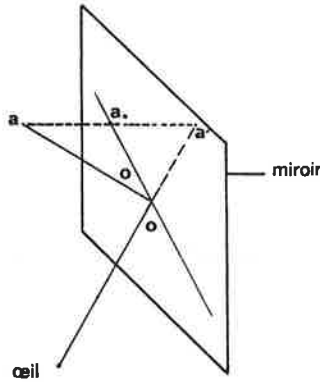


Fig. 124

Il en résulte que lorsqu'un faisceau de rayons lumineux émanant d'un objet a frappe un miroir, il suit ensuite exactement le même chemin que s'il provenait d'un objet identique a' situé de l'autre côté du miroir et disposé symétriquement par rapport à celui-ci (Fig. 124).

Dessiner le reflet d'un objet dans l'eau revient donc à dessiner l'image de l'objet par une symétrie orthogonale dont le plan est celui de la surface de l'eau (qui est réfléchissante).

---

<sup>14</sup> Nous faisons abstraction des phénomènes d'absorption et de réfraction du rayon lumineux.

Pour trouver l'image d'un point  $c$  sur la berge, traçons la droite verticale passant par  $c$  (orthogonale à la surface de l'eau) et marquons sur elle le point  $c_0$  où elle rencontre l'eau. Pour trouver le point  $c'$ , reflet de  $c$ , il suffit de reporter la longueur  $|c c_0|$  en dessous de  $c_0$ . (Fig. 123).

Cherchons maintenant des reflets de choses plus éloignées de la berge comme le lampadaire  $ab$ . Pour cela, nous prolongeons la verticale  $ab$  sur laquelle se trouveront les reflets  $a'$  et  $b'$ . Pour trouver le point  $a_0$  où elle rencontre le plan de l'eau, nous menons une horizontale passant par le point  $a$  et un point quelconque  $d$  de la berge. La droite parallèle à  $d$  passant par le point  $d_0$  de projection orthogonale de  $d$  sur la surface de l'eau, coupe la droite  $ab$  au point  $a_0$  cherché. On peut dès lors reporter les longueurs  $|a_0 a|$  et  $|a_0 b|$  en dessous de  $a_0$  pour trouver  $a'$  et  $b'$ .

#### Où s'arrêtent les ombres ? Solution.

Si l'on se souvient de la méthode pour tracer des ombres à la lampe, le problème a l'air facile à résoudre. On trace pour chaque arbre, la demi-droite  $[ab$  issue de la lampe et passant par le sommet de l'arbre et la droite  $cd$  passant par le pied du lampadaire et celui de l'arbre (Fig. 125). Leur intersection devrait déterminer la limite de l'ombre.

Seulement, dans ce cas, le point  $i$  d'intersection se trouve au dessus de la ligne d'horizon. La raison en est que, dans la réalité, les arbres sont plus grands que le lampadaire. On peut s'en rendre compte en traçant la droite  $eb$  passant par le sommet de l'arbre considéré et qui est parallèle à la droite  $ed$  dans la réalité. Cette droite passe au-dessus du lampadaire.

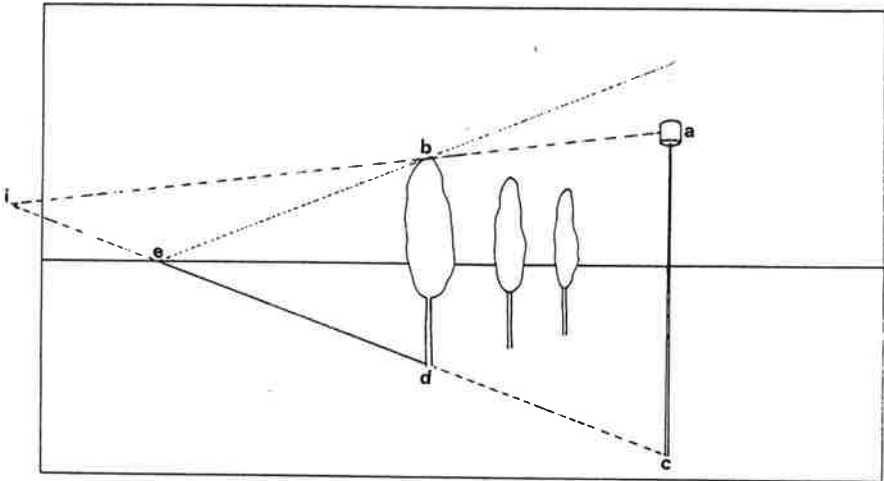


Fig. 125

Les ombres des arbres sur le plan horizontal seraient donc en principe infinies ce qui veut dire qu'on devrait les limiter sur le dessin à la ligne d'horizon, quoique, évidemment, aucune lampe n'est assez puissante pour projeter de telles ombres.

Le point *i* représente l'image par une projection centrale complète (Chap. 2, Section 6) du point d'intersection réel des droites *ab* et *cd* qui se trouve derrière le centre de projection *o*.

### 3. MIROIRS ET OMBRES A LA LAMPE

La Fig. 126 représente une pièce contenant une pyramide à base rectangulaire et une lampe allumée. Les deux murs visibles sont entièrement recouverts de deux grands miroirs. Complétez le dessin en y ajoutant les ombres et les reflets.

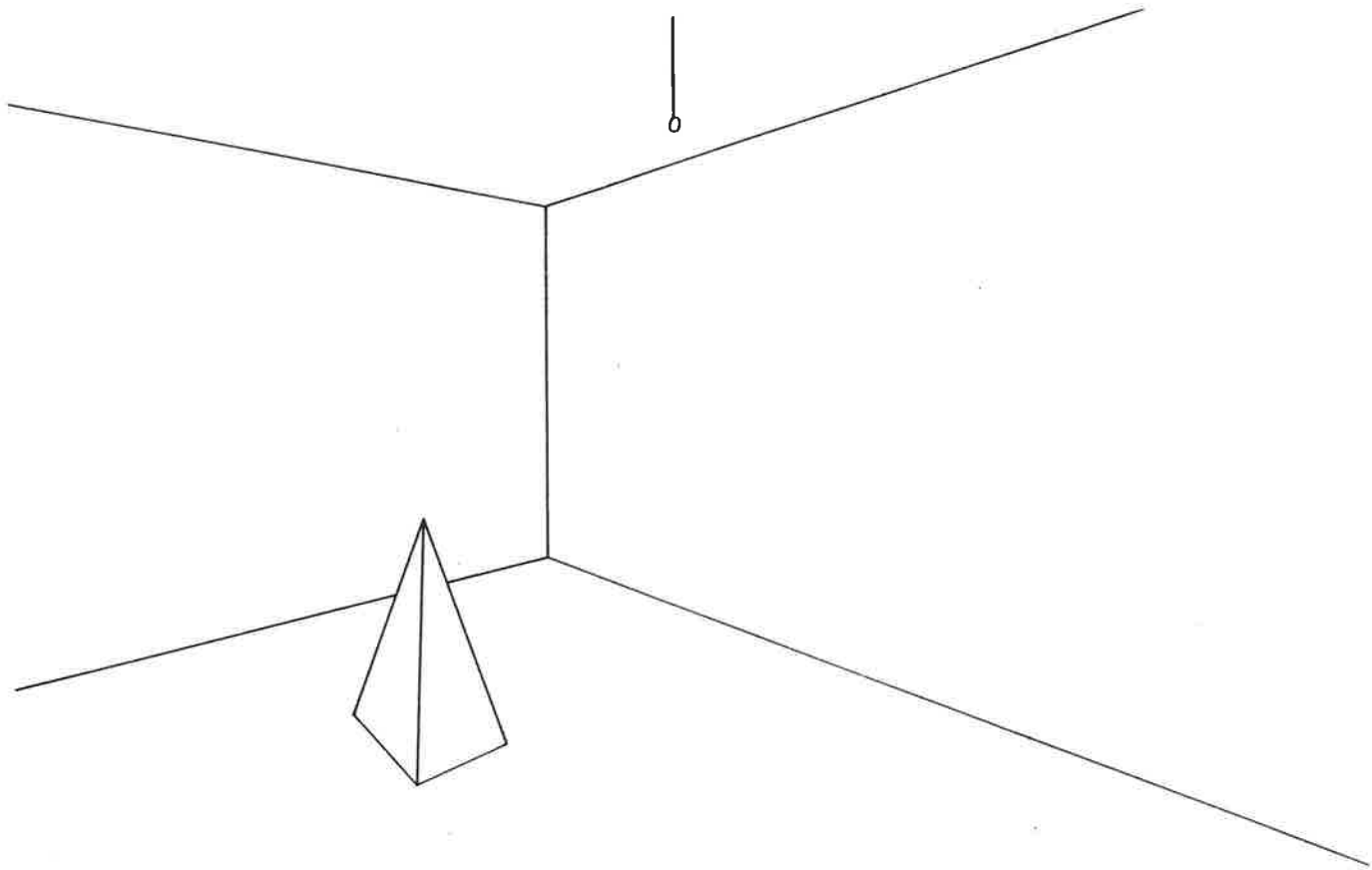


Fig. 126

Solution.

Reflets. Il s'agit de tracer les images, B et C, de la pièce A, par deux symétries orthogonales données par les miroirs M et N (Fig. 127).

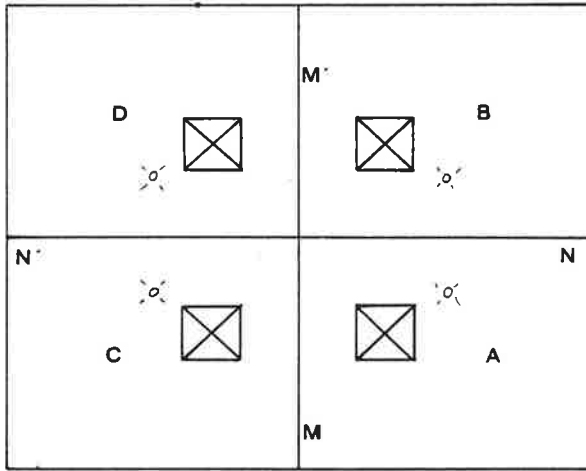


Fig. 127

Mais l'image B de la pièce A a aussi une image, D, dans le miroir M; c'est d'ailleurs aussi l'image de C dans le miroir N.

Cette concordance entre l'image de B dans M et celle de C dans N est due au fait que les angles de la pièce sont de  $90^\circ$ . Les Fig. 128 et 129 montrent ce qu'on verrait du point o si l'angle entre les deux miroirs avait une amplitude de  $72^\circ$  ou  $100^\circ$ .



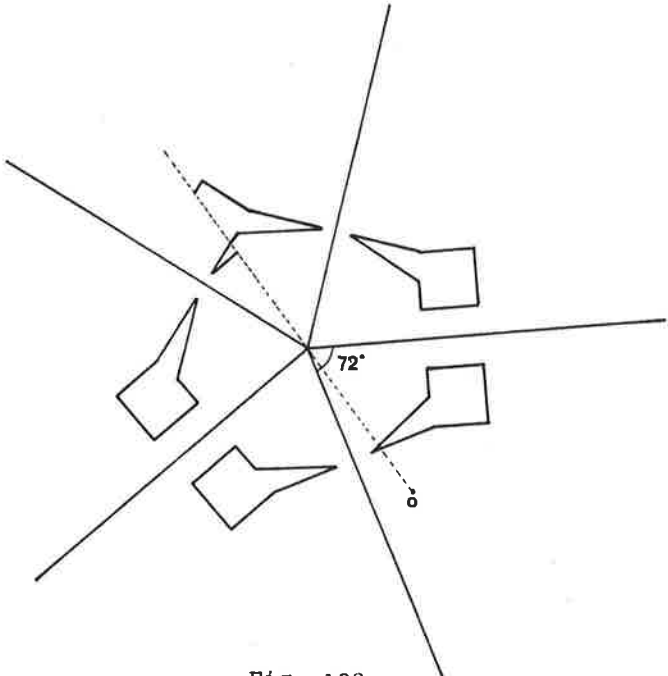


Fig. 128

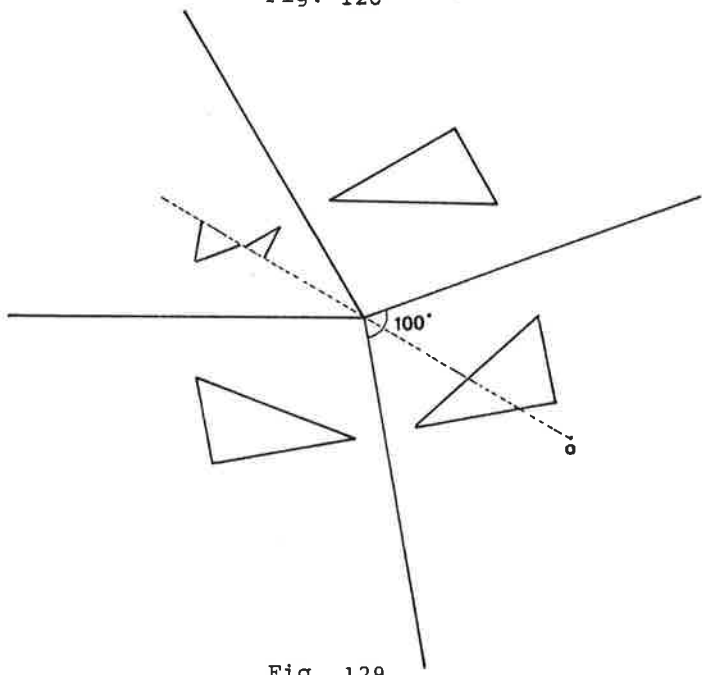


Fig. 129

Dessiner les reflets. On trace l'image de M' du mur de gauche, dans le miroir de droite N, en prolongeant les arêtes horizontales (Fig. 130). La longueur a été choisie arbitrairement.

Pour trouver les images de la pyramide, on peut utiliser la méthode de division en parties égales, comme indiqué à la Fig. 130 où  $|a' b'| = |d' e'|$  et  $|b' c'| = |c' d'|$ .

Tous les reflets peuvent être dessinés de cette manière.

Nous appellerons *image* d'un objet dans un miroir, l'objet fictif identique, situé de l'autre côté du miroir et disposé symétriquement par rapport à celui-ci.

Reflet de l'ombre et ombre du reflet. On trouve l'ombre de la pyramide (réelle) à la lampe (réelle) en appliquant la méthode vue au Chap. 2, Section 1 ou au Chap. 4, Section 2 (Fig. 131). Le pied de la hauteur de la pyramide se trouve grâce aux diagonales de la base, celui de la verticale passant par la lampe, grâce à la projection orthogonale, sur un mur, de la verticale la comprenant (Fig. 131).

On trouve le reflet de cette ombre dans un miroir, en traçant, par exemple, l'ombre de l'image de la pyramide due à l'image de la lampe.

Deux questions se posent : la lampe réelle peut-elle produire une ombre à l'image de la pyramide dans un des miroirs ? Le reflet de la lampe dans un miroir peut-il produire une ombre à la pyramide réelle ?

Comme nous l'avons vu à la Section 2, les rayons lumineux émanant de la lampe et frappant un miroir se réfléchissent en suivant le même chemin que s'ils provenaient de l'image de la lampe dans le miroir. On peut donc parler de l'ombre de la pyramide réelle due à l'image de la lampe puisque cette image produit une ombre comme si elle était une source lumineuse réelle.

Cette ombre tracée, nous devons tracer son image. Cela peut se faire en traçant directement l'ombre de l'image de la pyramide produite par la lampe réelle. Il y a donc un sens à parler de l'ombre de l'image de la pyramide due à la lampe réelle.

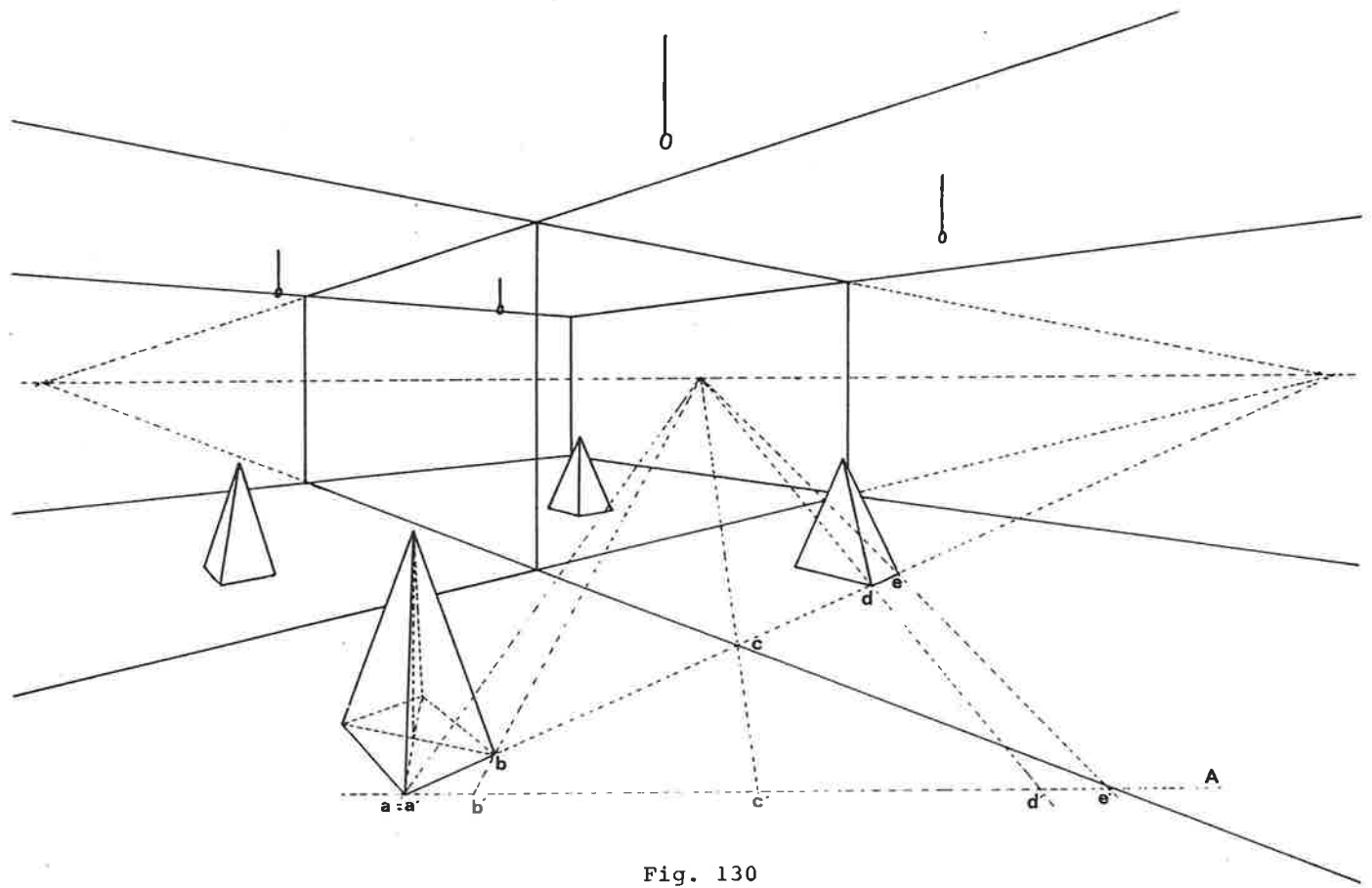


Fig. 130

En refaisant ce raisonnement pour chaque reflet, on trouvera que chaque pyramide (réelle ou fictive) a quatre ombres dues aux quatre lampes (réelles ou fictives).

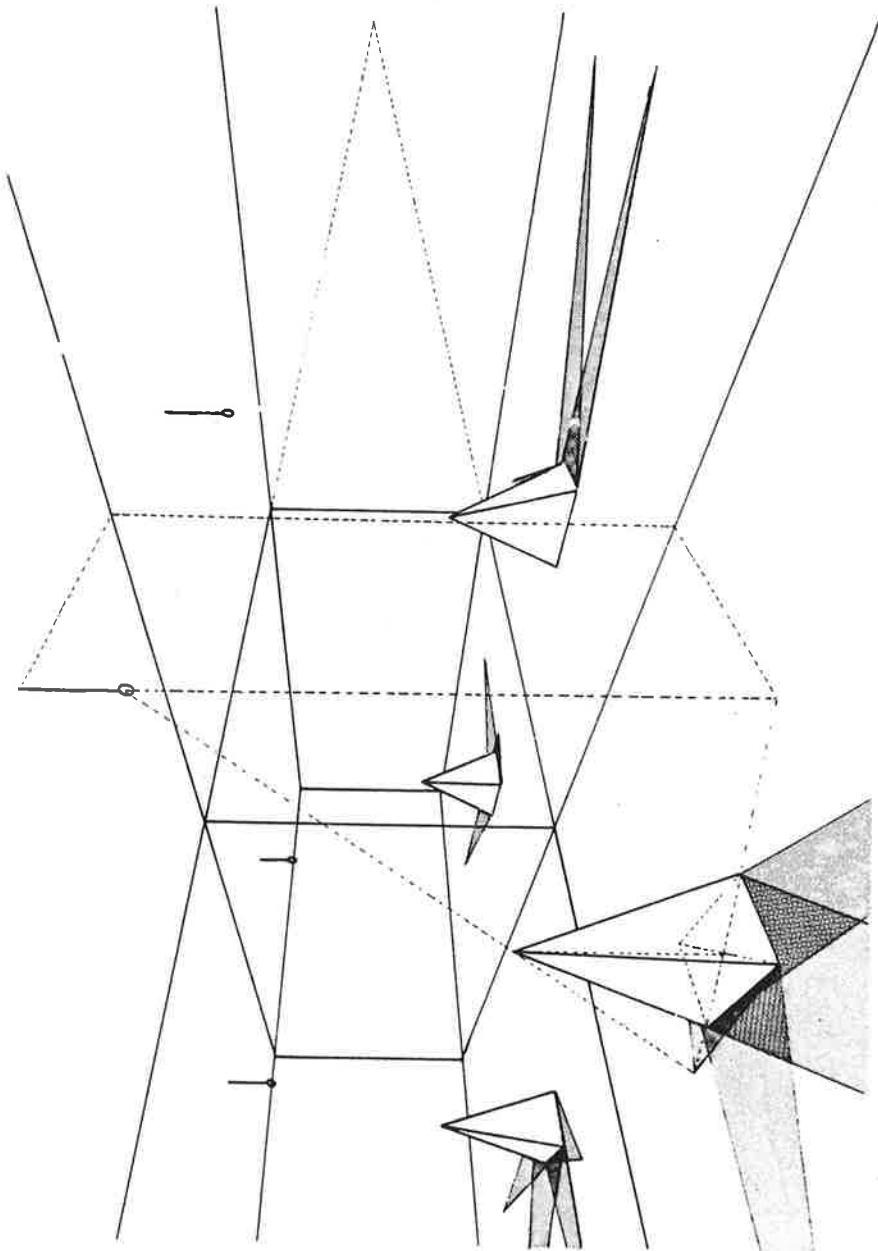


Fig. 131

## CHAPITRE 5

### LIRE UNE VUE EN PERSPECTIVE

#### 1. LE TUYAU INACCESSIBLE

Vous voulez connaître la longueur d'un tuyau dont le bout le plus éloigné de vous est inaccessible. La seule chose que vous pouvez faire pour le voir est de vous placer dans l'axe du tuyau. L'intérieur du tuyau vous apparaîtra alors sous la forme d'un anneau sombre. Sachant que la Fig. 132 représente ce que l'on voit lorsqu'on se trouve à un mètre du tuyau, calculez la longueur de celui-ci<sup>15</sup>.

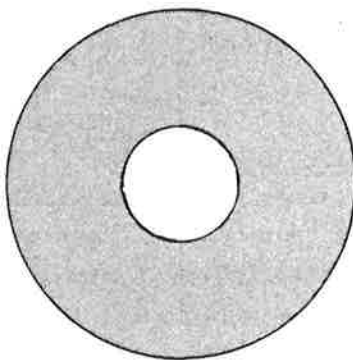


Fig. 132

---

<sup>15</sup> Ce problème est tiré d'un bulletin de la Société Belge des Professeurs de Mathématique (1985).

Solution.

En mesurant les rayons des deux cercles de la Fig. 132, nous trouvons qu'ils sont dans un rapport 1/3.

Représentons la situation de côté (Fig. 133). La similitude (Appendice 4) des triangles opa et cba nous permet d'affirmer que  $L = 2D$  et puisque  $D = 1$  m, la longueur du tuyau est de deux mètres.

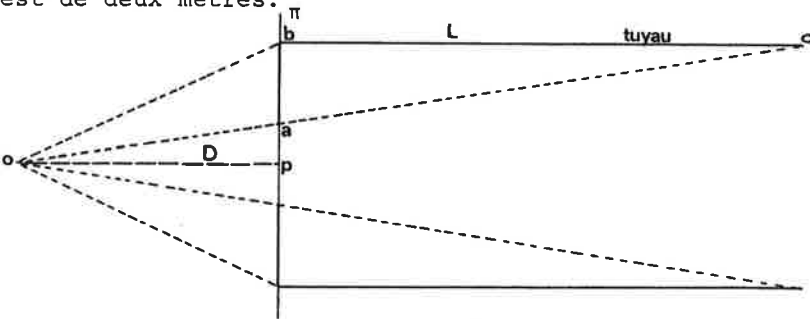


Fig. 133

Sur la Fig. 133, le plan de projection est "collé" sur l'entrée du tuyau, mais ceci n'intervient pas dans notre calcul puisque, s'il était plus près de l'observateur (mais toujours perpendiculaire au tuyau), l'image obtenue sur le plan ainsi situé serait la même à une homothétie près.

2. RECONSTITUTION DE SCENES PEINTES

Des personnages de toutes tailles.

En supposant que l'évêque qui baptise Clovis (Fig. 134) mesure 1 m 60, à combien estimez-vous la grandeur des autres personnages présents sur le tableau ?



Fig, 134  
*Le baptême de Clovis (à la Sainte Chapelle de Paris) du Maître de Saint-Gilles, vers 1495-1500.*

A partir d'un tableau de Vermeer.

*La leçon de musique* de Vermeer (1632-1675) (Fig. 135) est un tableau si parfait au point de vue de la perspective qu'il serait presque possible de reconstituer la scène dans les vraies dimensions.

En supposant que la jeune fille mesure 1 m 50, calculer, par exemple, les dimensions des fenêtres<sup>16</sup>. Sous quel angle Vermeer voyait-il la scène quand il l'a peinte ?

---

<sup>16</sup> Ce problème a été inspiré par F. Dubery et J. Willats (1983).



Fig. 135

*La leçon de musique* de J. Vermeer, 1665-1670, (Royal Collection, The Queen's Gallery).

Des personnages de toutes tailles. Solution.

*Le baptême de Clovis* n'a pas été peint selon les lois de la perspective; cela se voit, par exemple, à la représentation du carrelage. Nous ne pouvons pas estimer la grandeur réelle des personnages. Néanmoins, il y a une nette différence de grandeur (sur le tableau) entre les personnages de l'avant-plan (excepté le moine en blanc) et ceux de l'arrière-plan, alors que ceux-ci ne semblent pas tellement éloignés; ils paraissent donc beaucoup plus petits.



A partir d'un tableau de Vermeer. Solution.

Dans le développement qui suit, nous travaillerons surtout avec les longueurs réelles plutôt qu'avec les longueurs mesurées sur le tableau : par exemple, quand nous parlons de la longueur  $|a b|$ , il s'agit de la longueur du segment réel représenté sur le tableau par  $[a b]$ . Lorsque, par exception, nous parlerons des longueurs mesurées sur le tableau, nous le préciserons.

Le point principal  $p$  (Fig. 136) et les deux points de fuite  $f_1$  et  $f_2$  des droites horizontales formant un angle de  $45^\circ$  avec le plan du tableau se trouvent grâce au carrelage.

Remarquons que sur la Fig. 136

$$|p f_1| = 86 \text{ mm}$$

alors que

$$|p f_2| = 92 \text{ mm}.$$

Cette différence peut être attribuée, par exemple, à l'imprécision de notre construction ou de celle de Vermeer. Nous prendrons comme distance  $D$  de l'oeil à la figure, 88 mm.

Nous pouvons, dès lors, répondre à la deuxième question concernant l'angle de champ. Nous le définissons à l'aide des angles  $ioj$  et  $kol$  (Fig. 137).

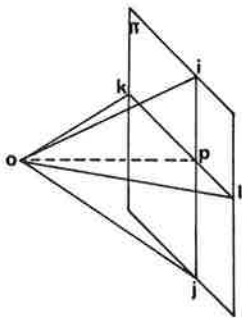


Fig. 137

Pour mesurer l'angle  $kol$ , nous rabattons  $o$  sur le tableau (en  $f_3$ ) par une rotation de  $90^\circ$  autour de  $lk$ ; il vaut  $43^\circ$ .

Pour l'angle  $ioj$ , nous rabattons  $o$  sur le tableau (en  $f_1$ ) par une rotation autour de  $ij$ ; il vaut  $49^\circ$ .

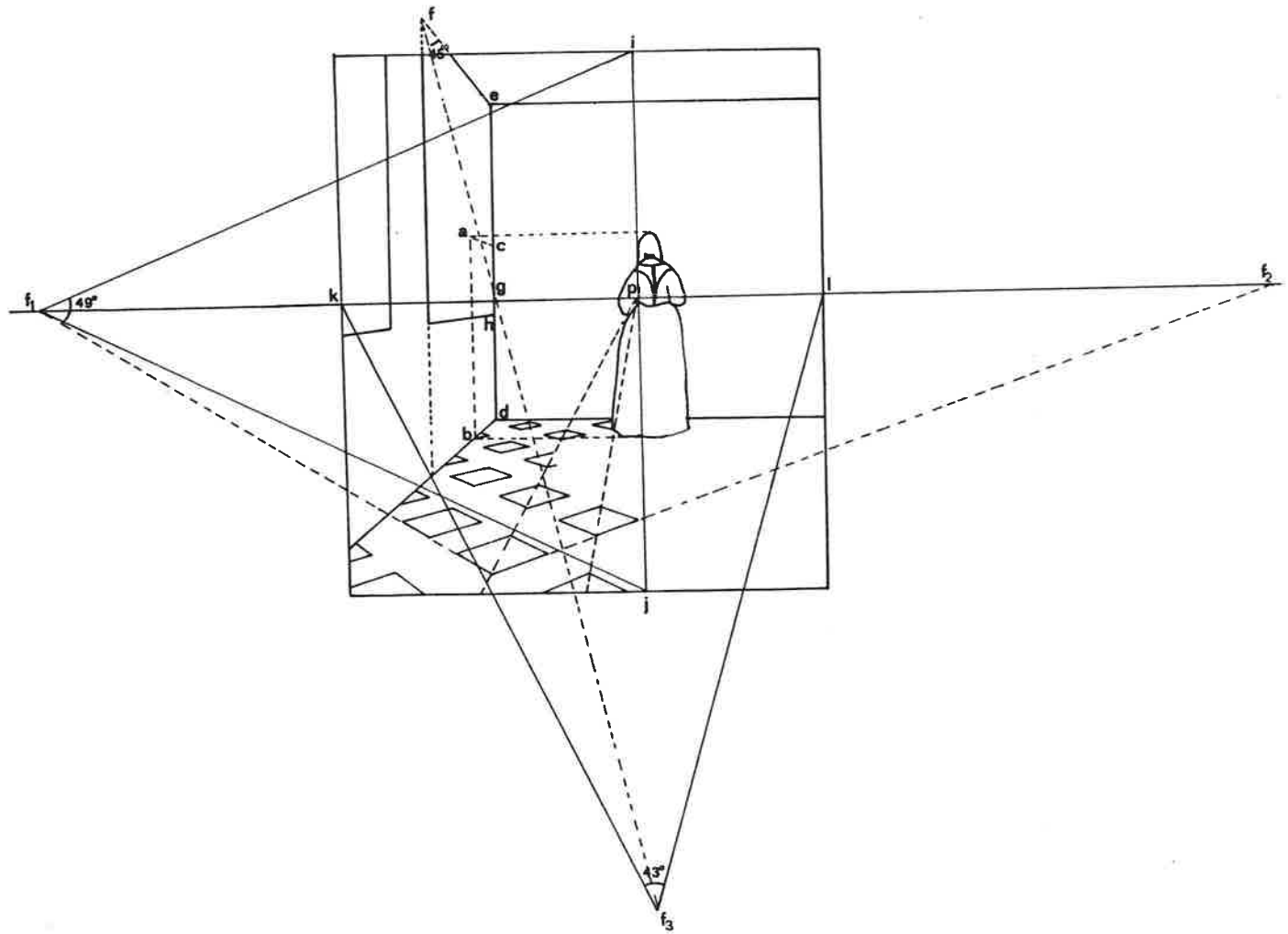


Fig. 136

Reportons la hauteur de la jeune fille sur le mur de gauche en [ a b ], puis, grâce au point p, sur le mur du fond en [ c d ]. La hauteur de la fenêtre est représentée par le segment [ e h ] qui mesure 30 mm sur le tableau. Or [ c d ] mesure 25 mm sur le tableau et 1 m 50 dans la réalité. La hauteur réelle de la fenêtre vaut donc

$$1m50 \cdot \frac{30}{25} = 1m80.$$

Pour trouver la largeur de la fenêtre, reportons la longueur [ f e ] sur l'arête [ e d ]. Pour cela, traçons la droite fg formant un angle de 45° avec fe. Pour y arriver, cherchons son point de fuite. Il se trouve sur la ligne de fuite, p<sub>j</sub>, du plan vertical fe<sub>g</sub>. Puisque la droite cherchée forme un angle de 45° avec fe, une droite perpendiculaire au tableau, son point de fuite est le point f<sub>3</sub> situé à la distance D, en dessous de p (Chap. 2, Section 5). Sur le tableau, le segment [ e g ] mesure 27 mm. Sa longueur réelle, qui donne la largeur de la fenêtre, vaut donc

$$1m50 \cdot \frac{27}{25} = 1m62.$$

Nous aurions pu résoudre le problème par une autre méthode dite de Léonard de Vinci (1452-1519) (voir F. Dubery, J. Willats (1983)) dont voici le principe.

Après avoir trouvé la distance D de la manière indiquée ci-dessus, on peut calculer à quelle distance D' de la jeune fille (Fig. 138) le peintre se trouve, en comparant la grandeur réelle de la jeune fille (1 m 50) et sa grandeur mesurée sur le tableau (28 mm). En appliquant le théorème de Thalès à la Fig. 138, on obtient

$$D' = 1m50 \cdot \frac{88}{28} = 4m71.$$

Puis, on mesure la longueur de la diagonale d'un carreau au même niveau que la jeune fille ( 6 mm). La longueur réelle de cette diagonale (Fig. 139) est donc

$$4m71 \cdot \frac{6}{88} = 0m32.$$

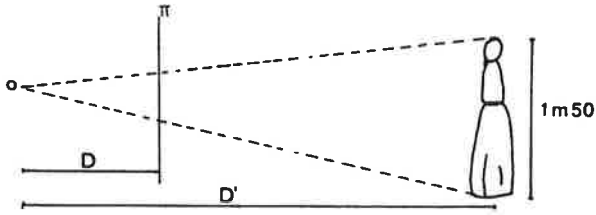


Fig. 138

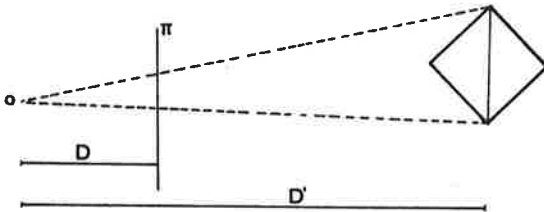


Fig. 139

Pour trouver les dimensions de n'importe quel objet de la peinture, on compare la longueur de sa représentation avec celle des carreaux au même niveau : par exemple, on compte presque cinq diagonales de carreaux bout à bout sur la largeur de la fenêtre. Celle-ci mesure donc approximativement

$$5 \cdot 0m32 = 1m60.$$

### 3. DESSIN D'UN ARCHITECTE

A partir du plan d'une maison (Fig. 140), vérifiez si la vue en perspective (Fig. 141) est correcte. En particulier, vous semble-t-il normal de voir les deux fenêtres de droite presque complètement ?

(Sans solution.)

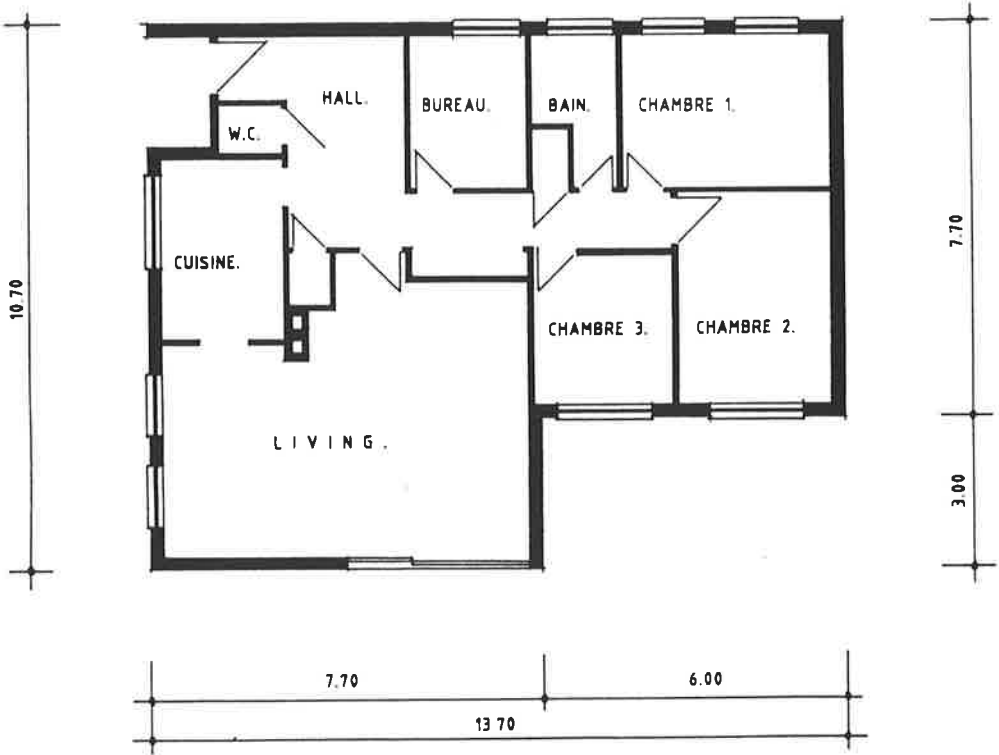


Fig. 140

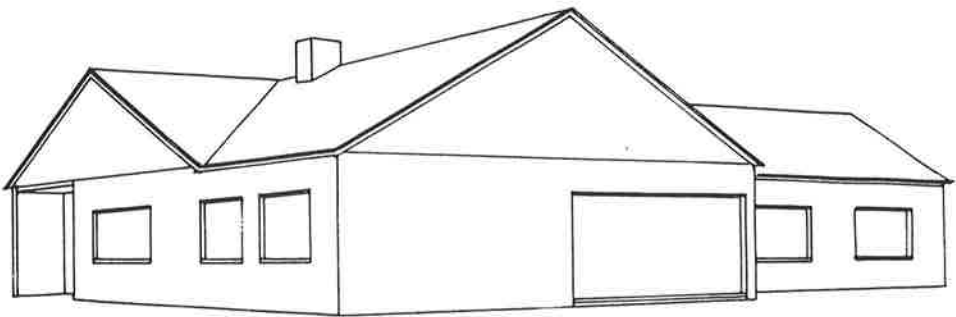


Fig. 141

#### 4. PERSPECTIVE ET PHOTOGRAPHIE

L'appareil photo est basé sur le principe d'une projection centrale dont le centre est l'objectif et le plan de projection, la pellicule. Ce plan est placé derrière le centre de projection comme l'illustre la Fig. 142. Néanmoins, l'image obtenue est la même que si le plan se trouvait devant le centre de projection et à la même distance de celui-ci (Fig. 143).

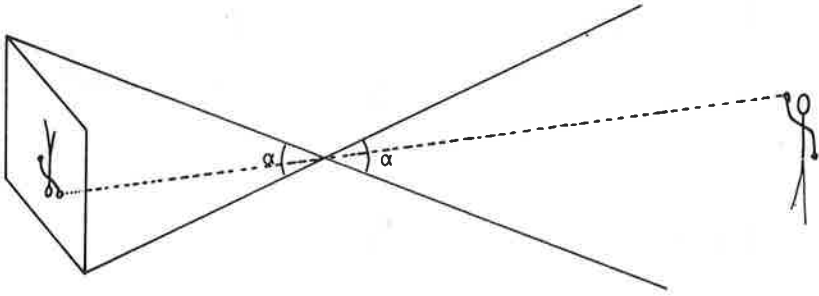


Fig. 142

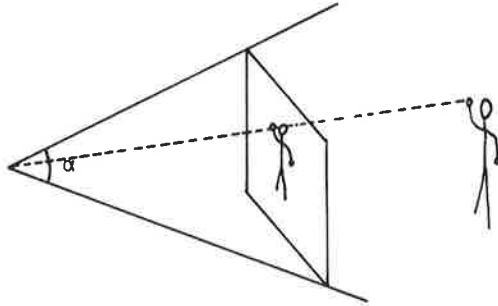


Fig. 143

Les différents objectifs permettent de photographier des scènes sous un angle qui varie à peu près de  $2,1^\circ$  (téléobjectif) à  $180^\circ$  (fish-eye, grand angulaire). Notons au passage que, pour les très grands angulaires, il ne s'agit plus d'une projection centrale. Pour un objectif donné, l'angle de champ est défini comme l'angle  $\alpha$  sous lequel le centre de projection (l'objectif) voit la diagonale de la pellicule (Fig. 142 et 143).

Photographier la lune.

Pensez-vous qu'il soit possible d'obtenir une photo équivalente à la Fig. 144, c'est-à-dire pour laquelle les personnages et la lune aient la même grandeur que sur cette figure ? A votre avis, quelle serait la taille de la lune sur une photo de même grandeur que la Fig. 144, prise avec un objectif standard (46°) ?



Fig. 144

Deux photos pour la même route.

A votre avis, combien de temps mettriez-vous pour parcourir l'allée visible sur la Fig. 145 ? Et celle sur la Fig. 146 ? Le même temps, sans doute, puisque les deux photos représentent la même partie de l'allée : pour s'en rendre compte, il suffit de compter le nombre de bas de colonne visibles. Alors comment expliquez-vous la différence entre ces deux photos ? Pour laquelle des deux photos le photographe a-t-il pris le plus de recul ?



Fig. 145



Fig. 146



Photographier la lune. Solution.

Notre oeil voit la lune dans la nature sous un angle de  $0,5^\circ$  (et l'objectif d'un appareil photographique aussi). Si la Fig. 144 était une photo, sa diagonale (qui est plus grande que le diamètre de la lune dessinée) aurait été "perçue" par l'objectif sous un angle un peu plus grand, disons  $0,8^\circ$ . Pour obtenir une photo semblable, nous pourrions utiliser un télé-objectif dont l'angle est, par exemple, de  $2,1^\circ$  puis agrandir la photo suffisamment pour que la lune mesure 82 mm comme à la Fig. 144 et ensuite la découper en ne gardant que la partie qui nous intéresse.

Cherchons quelle serait la grandeur de la lune sur une photo prise avec un objectif standard ( $46^\circ$ ). Le schéma de la Fig. 147, sur laquelle la longueur de 125 mm est celle de la diagonale de la photo, nous permet d'écrire

$$\operatorname{tg} 23^\circ = \frac{62,5}{D} \quad (1)$$

et

$$\operatorname{tg} 0,25^\circ = \frac{x}{D} \quad (2)$$

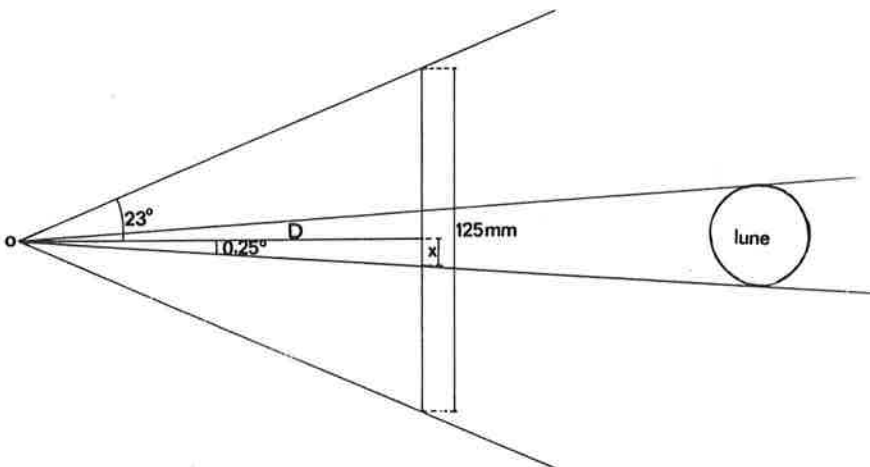


Fig. 147

(Attention, sur cette figure, les angles ne sont pas représentés en vraie grandeur.) En éliminant D dans (1) et (2), nous obtenons

$$x = \frac{62,5}{\operatorname{tg} 23^\circ} \cdot \operatorname{tg} 0,25^\circ = 0,64.$$

Le diamètre de la lune sur la photo serait donc à peu près de 1,3 mm.

Deux photos pour la même route. Solution.

La Fig. 145 a été prise avec un objectif 35 mm ( $62^\circ$ ) alors que, pour la Fig. 146, le photographe a utilisé un télé-objectif 135 mm ( $18^\circ$ ) comme le montre le schéma de la Fig. 148. Les deux photos sont du même type que les Fig. 61 et 62 qui pouvaient également représenter la même route et les mêmes arbres vus sous deux angles différents. Pour la Fig. 146 le photographe a dû prendre beaucoup plus de recul que pour la Fig. 145.

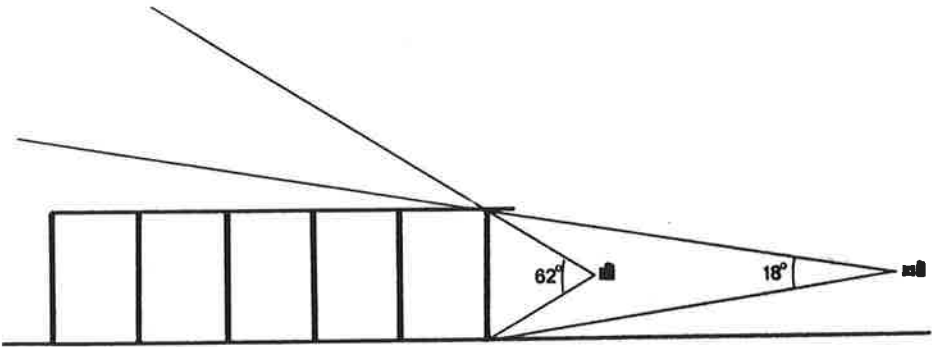


Fig. 148

## CHAPITRE 6

### COURBES, POLYEDRES, ETC.

La Section 1 de ce chapitre fait appel à certaines connaissances en géométrie analytique et en analyse (équations paramétriques, limites, asymptotes, etc.) qui ne sont pas reprises dans les appendices. Si vous craignez de ne pas vous en tirer, passez directement à la Section 2.

#### 1. REPRESENTATION DE COURBES

##### La sinusoïde.

Comment le personnage de la Fig. 149 va-t-il dessiner en perspective la sinusoïde horizontale ?

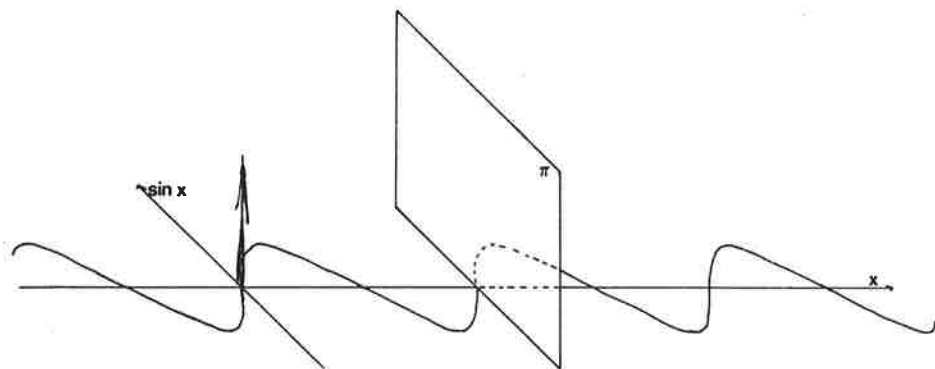


Fig. 149

Pistes. 1. Essayez d'abord de deviner l'allure générale de la courbe-image en répondant, par exemple, aux questions suivantes :

La sinusoïde est comprise entre deux droites parallèles; comment sont les images de ces droites ?

Soit un point  $a'$  donné de la courbe-image. Y a-t-il un nombre fini de "virages" au dessus de ce point ? Et en dessous (si vous prolongez le tableau) ?

2. Soit, dans le repère  $(o, x, y, z)$  centré sur l'observateur (Fig. 150), le plan  $\pi$  d'équation  $x=D$ . Et soit  $q'$ , l'image d'un point  $q$  quelconque par la projection sur le plan  $\pi$ . Donnez, dans le même repère, les coordonnées  $(x', y', z')$  de  $q'$  en fonction des coordonnées  $(x, y, z)$  de  $q$ .

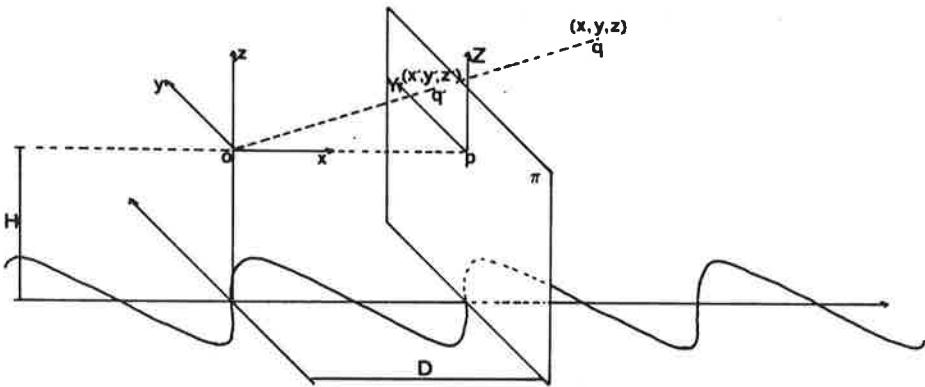


Fig. 150

3. Ecrivez les équations paramétriques de la sinusoïde dans le même repère.

4. Ecrivez les équations paramétriques de l'image de la sinusoïde à l'aide de 2. et 3., puis éliminez le paramètre pour obtenir son équation cartésienne dans le repère  $(p, Y, Z)$  (Fig. 150).

L'escalier hélicoïdal.

Une rampe d'escalier monte en hélice autour d'un cylindre imaginaire. Comment sera sa photo prise dans son axe (on suppose l'escalier infini) ?



Fig. 151

Pistes. 1. Quelle est l'allure générale de la courbe-image ? Où commence-t-elle et où finit-elle ? En partant d'un point  $a'$  donné de la courbe et en se déplaçant sur elle vers le "centre", combien compte-t-on de "tours" ? Et en s'éloignant du centre ?

2. Soit, dans les coordonnées cylindriques associées au repère  $(o, r, \theta, z)$  de la Fig. 152, le plan  $\pi$  d'équation  $z=D$ . Et soit  $q'$  l'image d'un point  $q$  quelconque par la projection de centre  $o$  sur le plan  $\pi$ .

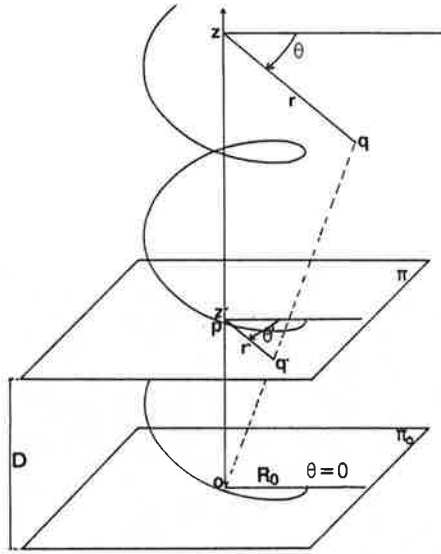


Fig. 152

Donnez les coordonnées  $(r', \theta', z')$  de  $q'$  en fonction des coordonnées  $(r, \theta, z)$  de  $q$ .

3. Ecrivez les équations paramétriques de l'hélice dans le même repère.

4. Ecrivez les équations paramétriques de l'image de l'hélice, puis éliminez le paramètre pour obtenir son équation polaire dans le plan  $\pi$ .

La sinusoïde. Solution.

La sinusoïde étant comprise entre deux droites perpendiculaires au tableau, son image se trouvera entre deux droites fuyant vers le point  $p$  (Fig. 153). Au dessus d'un point  $a'$  de la courbe-image et jusqu'au point  $p$ , il y a une infinité de "virages" puisque cette partie de la courbe est l'image d'une partie de la sinusoïde se situant derrière le point  $a$  correspondant et comprenant une infinité de virages.

Par contre, la partie de la courbe-image en dessous du point  $a'$  correspond à la partie de la sinusoïde comprise entre le point  $a$  et les pieds de l'observateur; elle ne comprend donc qu'un nombre fini de virages.

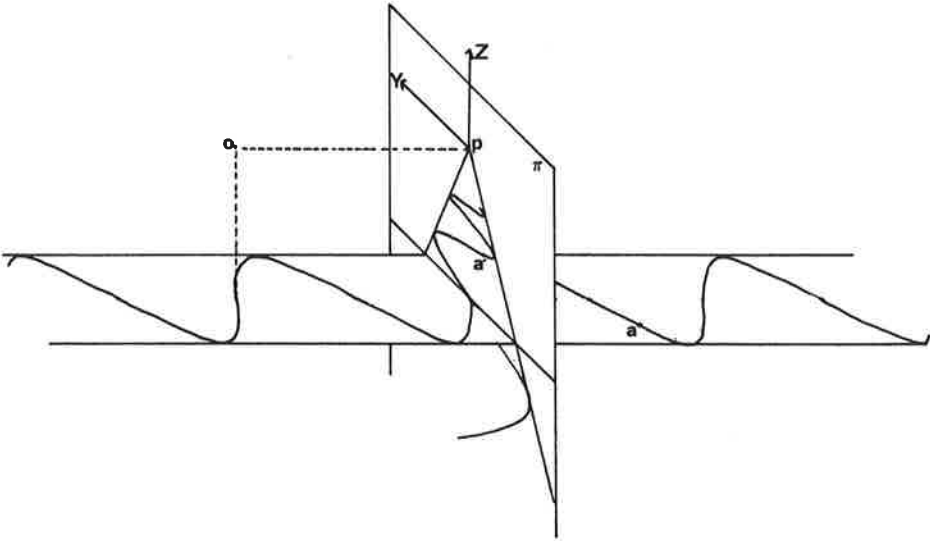


Fig. 153

Dans le repère  $(o, x, y, z)$  de la Fig. 150, le point  $q'$  a pour coordonnées

$$x' = D,$$

$$y' = \frac{D}{x} \cdot y,$$

$$z' = \frac{D}{x} \cdot z.$$

Les équations paramétriques de la sinusoïde sont

$$x = t,$$

$$y = \sin t,$$

$$z = -H,$$

où  $t$  est le paramètre et  $H$ , une constante.

Et donc les équations paramétriques de son image sont

$$x = D,$$

$$y = \frac{D}{t} \cdot \sin t,$$

$$z = \frac{D}{t} \cdot (-H).$$

En éliminant  $t$ , nous obtenons

$$x = D,$$

$$y = \frac{z}{H} \cdot \sin \frac{D.H}{z}.$$

En prenant  $D = H = 1$  pour simplifier l'expression, nous obtenons dans un nouveau repère  $(p, Y, Z)$  (Fig. 150) l'équation

$$Y = Z \cdot \sin \frac{1}{Z}.$$

C'est l'équation de la courbe représentée à la Fig. 154. Elle est l'image de la sinusoïde par une projection centrale "complète". La courbe en trait fort est l'image de la partie de la sinusoïde se situant au delà du plan  $\pi$ .

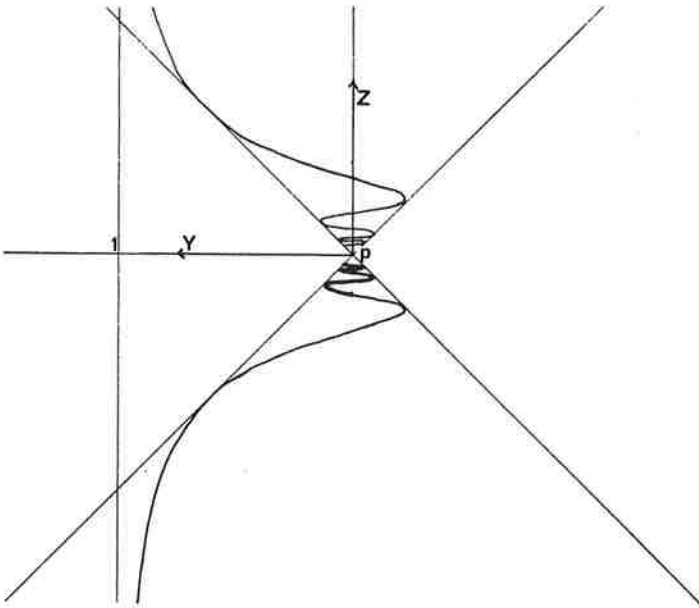


Fig. 154

Cette courbe possède une asymptote. On peut s'en persuader intuitivement en remarquant que le point de la sinusoïde se situant aux pieds de l'observateur a son image à l'infini sur la verticale passant par  $p$ . La distance de l'axe  $Z$  à l'asymptote est donnée par



$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \left( Z \cdot \sin \frac{1}{Z} \right) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin T}{T} = 1$$

et

$$\lim_{Z \rightarrow -\infty} \left( Z \cdot \sin \frac{1}{Z} \right) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin T}{T} = 1.$$

L'escalier hélicoïdal. Solution.

L'image de l'hélice est une spirale, une courbe qui "s'enroule" autour du point  $p$ , appelé son *pôle*.

Divisons la courbe en deux parties en la "coupant" en un de ses points,  $a'$ . La partie proche du pôle comprend une infinité de *spires* puisqu'elle est l'image d'une partie de l'escalier comprenant une infinité d'étages<sup>17</sup>. La partie la plus éloignée du pôle ne comprend qu'un nombre fini de spires puisqu'elle est l'image de la partie de l'hélice comprise entre le plan  $\pi_0$  de l'observateur et le point  $a$  correspondant au point  $a'$ . De plus, le point de l'hélice appartenant au plan  $\pi_0$  a son image à l'infini sur le tableau<sup>18</sup>.

Sur la Fig. 152, le point courant  $q$  de coordonnées  $(r, \theta, z)$

a pour projection sur  $\pi$  le point  $q'$  de coordonnées  $\frac{D}{z} \cdot r, \theta, D$ .

Contrairement à l'usage, on accepte de considérer, dans ces formules, un rayon polaire négatif (dès que  $z < 0$ , on a

$$\frac{D}{z} \cdot r < 0).$$

<sup>17</sup> Ce n'est donc pas une spirale d'Archimède car celle-ci ne compte qu'un nombre fini de spires vers l'intérieur.

<sup>18</sup> L'image de l'hélice tend donc vers l'infini après un nombre fini de tours (à partir du point  $a'$ ); ce n'est donc pas non plus une spirale logarithmique puisque celle-ci a une infinité de spires vers l'extérieur. Pour plus d'explications sur les spirales (logarithmique, d'Archimède et d'autres encore), voir M. Deletrain, B. Goffart (1985-1986) ou F. Gomes de Teixeira (1971).

Les équations paramétriques de l'hélice sont

$$\begin{aligned}r &= R_0, \\ \theta &= \omega \cdot t, \\ z &= t,\end{aligned}$$

où  $t$  est le paramètre et  $R_0, \omega$  sont des constantes.

Les équations paramétriques de son image sont donc

$$\begin{aligned}r &= \frac{D}{t} \cdot R_0 \\ \theta &= \omega \cdot t \\ z &= D.\end{aligned}$$

En éliminant  $t$  et en laissant tomber la coordonnée  $z$ , nous obtenons l'équation de la spirale dans le plan  $\pi$ ,

$$r = \frac{D \cdot \omega \cdot R_0}{\theta},$$

où  $D \cdot \omega \cdot R_0$  est une constante. C'est l'équation de la spirale hyperbolique représentée aux Fig. 155 et 156.

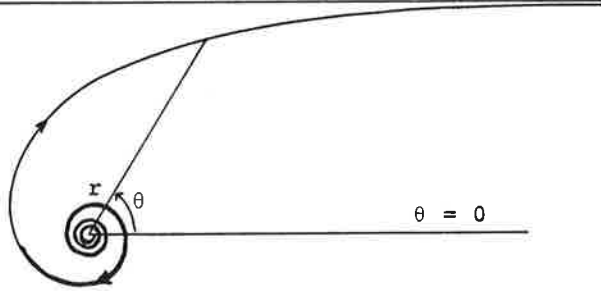


Fig. 155

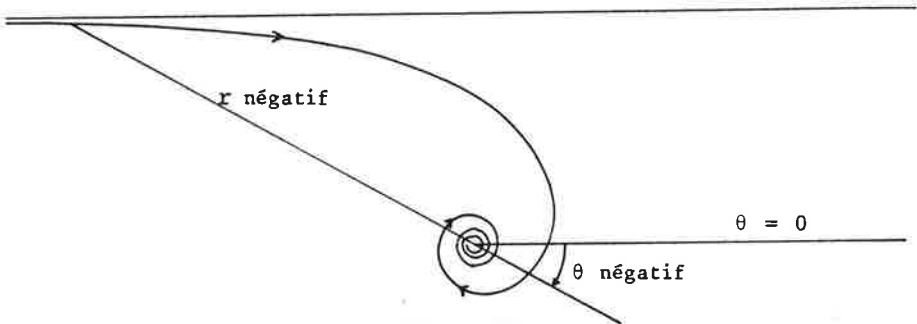


Fig. 156

La courbe en trait fort est l'image de la partie de l'escalier au dessus du plan  $\pi$ . La Fig. 156 est l'image par la projection centrale complète de la partie de l'hélice se trouvant en dessous de l'observateur. La flèche indique le sens de parcours d'une personne descendant l'escalier.

Cette spirale possède une asymptote. En effet, le point de l'hélice appartenant au plan  $\pi_0$ , parallèle à  $\pi$  et passant par  $o$ , a son image à l'infini sur le tableau. On peut calculer la distance  $H$  de l'axe  $\theta = 0$  à l'asymptote en considérant les projections orthogonales des points  $v$  de la spirale sur un axe  $Y$  perpendiculaire à l'asymptote (Fig. 157). L'abscisse de  $v'$  sur  $Y$  est

$$r \sin \theta = \frac{D \cdot \omega \cdot R_0}{\theta} \sin \theta.$$

D'où

$$H = \lim_{\theta \rightarrow 0} (D \cdot \omega \cdot R_0 \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}) = D \cdot \omega \cdot R_0.$$

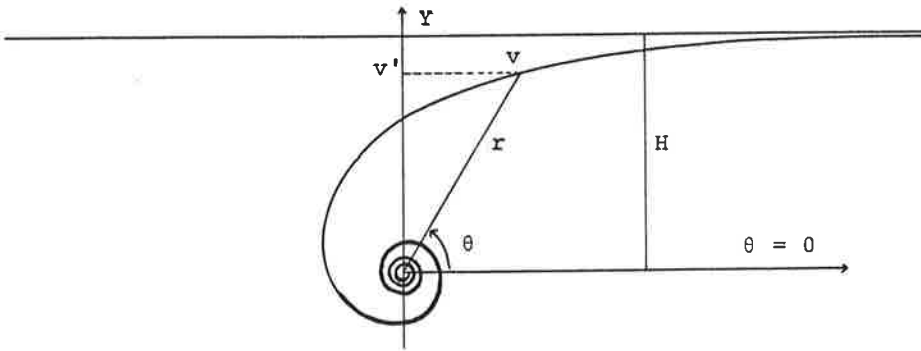


Fig. 157

Une propriété de la spirale hyperbolique que l'on découvre grâce à la perspective. Considérons deux points  $a$  et  $b$  de l'hélice, situés l'un au dessus de l'autre (Fig. 158) et les tangentes à la courbe en ces points,  $T_a$  et  $T_b$ . Comment seront les images des droites  $T_a$  et  $T_b$  sur le tableau ?

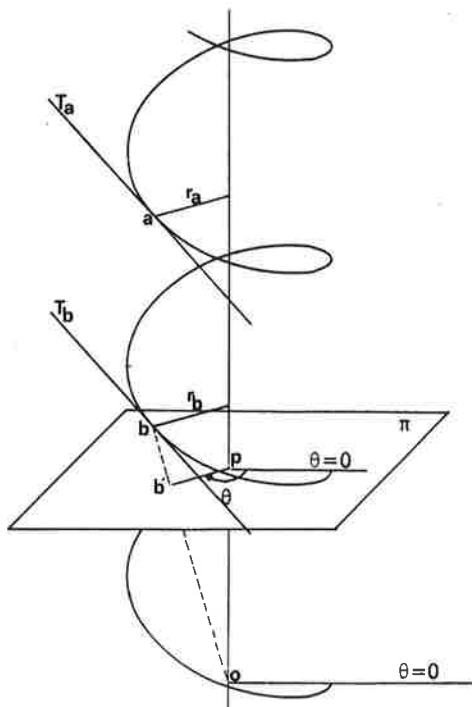


Fig. 158

Les droites  $T_a$  et  $T_b$  étant parallèles entre elles et non parallèles au plan du tableau, leurs images ont un point de fuite.

Qu'en est-il des autres tangentes ? Elles font toutes un même angle  $\psi$  avec le tableau. Leurs images sur le tableau, qui sont les tangentes à la spirale, ont donc leur point de fuite à une distance  $D \cotg \psi$  (Fig. 159). Le lieu de ces points de fuite est un cercle (Fig. 161).

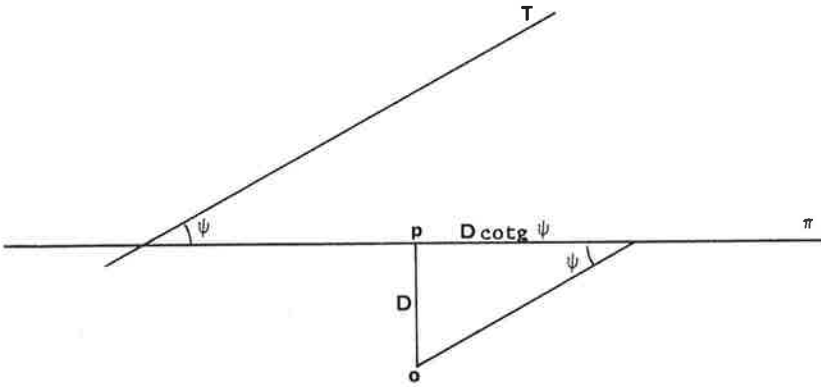


Fig. 159

Pour exprimer  $\psi$  en fonction des constantes  $R$  et  $w$ , "déroulons" le cylindre contenant l'hélice (Fig. 160). On en tire

$$\cotg \psi = \frac{R_0 \cdot \Delta\theta}{\Delta z} = \frac{R_0 \cdot w \cdot \Delta t}{\Delta t} = R_0 \cdot w.$$

D'où, le rayon du centre des points de fuite vaut  $D \cdot w \cdot R_0$ .

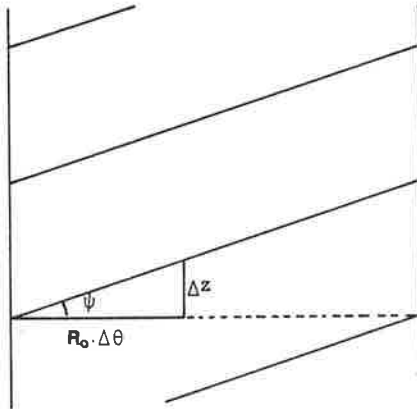


Fig. 160

Etant donné un point  $a'$  de la spirale, cherchons où se situe exactement le point de fuite de la tangente à la courbe en ce point. Pour cela, reprenons les deux tangentes à l'hélice,  $T_a$  et  $T_b$  (Fig. 158). Elles sont dans un plan perpendiculaire au tableau et perpendiculaire aux segments  $r_a$  et  $r_b$ . La ligne de fuite de ce plan passe par  $p$  et est perpendiculaire aux rayons  $pa'$ ,  $pb'$ , images de  $r_a$  et  $r_b$ . Le point de fuite des tangentes à la spirale aux points  $a'$  et  $b'$ ,  $T'_a$  et  $T'_b$ , se

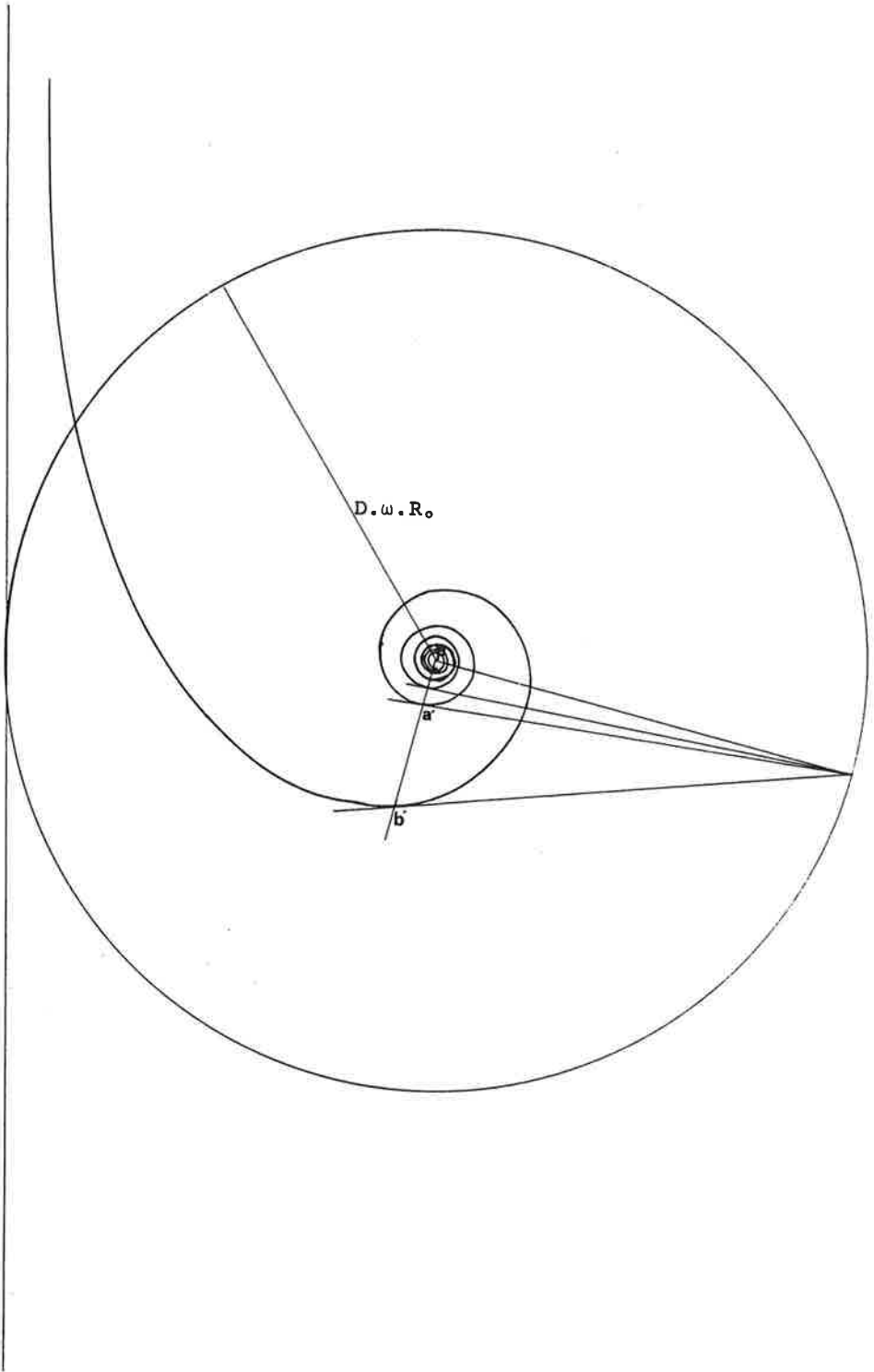


Fig. 161

situe donc sur la droite passant par  $p$  et perpendiculaire à  $pa'$  et  $pb'$  et sur le cercle de centre  $p$  et de rayon  $D \cdot \omega \cdot R_0$ .

L'image d'une hélice conique fournit également une belle spirale différente de celle que l'on vient de rencontrer (cf. M. Deletrain et B. Goffart, 1985-1986). Etudiez-la, elle vous réserve de belles surprises !

## 2. AUTRES DESSINS

### L'escalier hélicoïdal vu de côté.

Plusieurs auteurs de traités de perspective ont dessiné l'escalier hélicoïdal vu de côté, mais avec des succès divers. La Fig. 162 est tirée d'un livre de Hieronymus Rodler (1531), théoricien de l'architecture; celui-ci "présente son livre comme une adaptation pour les artisans de la méthode "trop savante" de Dürer" (P. Descargues, 1976).

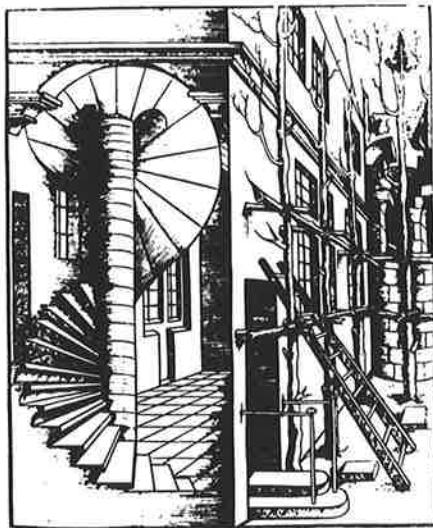


Fig. 162  
Hieronymus Rodler, 1531, cité par P. Descargues (1976).

La réflexion sur la perspective proposée jusqu'ici doit vous permettre de dessiner un escalier comme à la Fig. 163 et peut-être, avec beaucoup de patience et de minutie, d'arriver à la perfection de la Fig. 164.

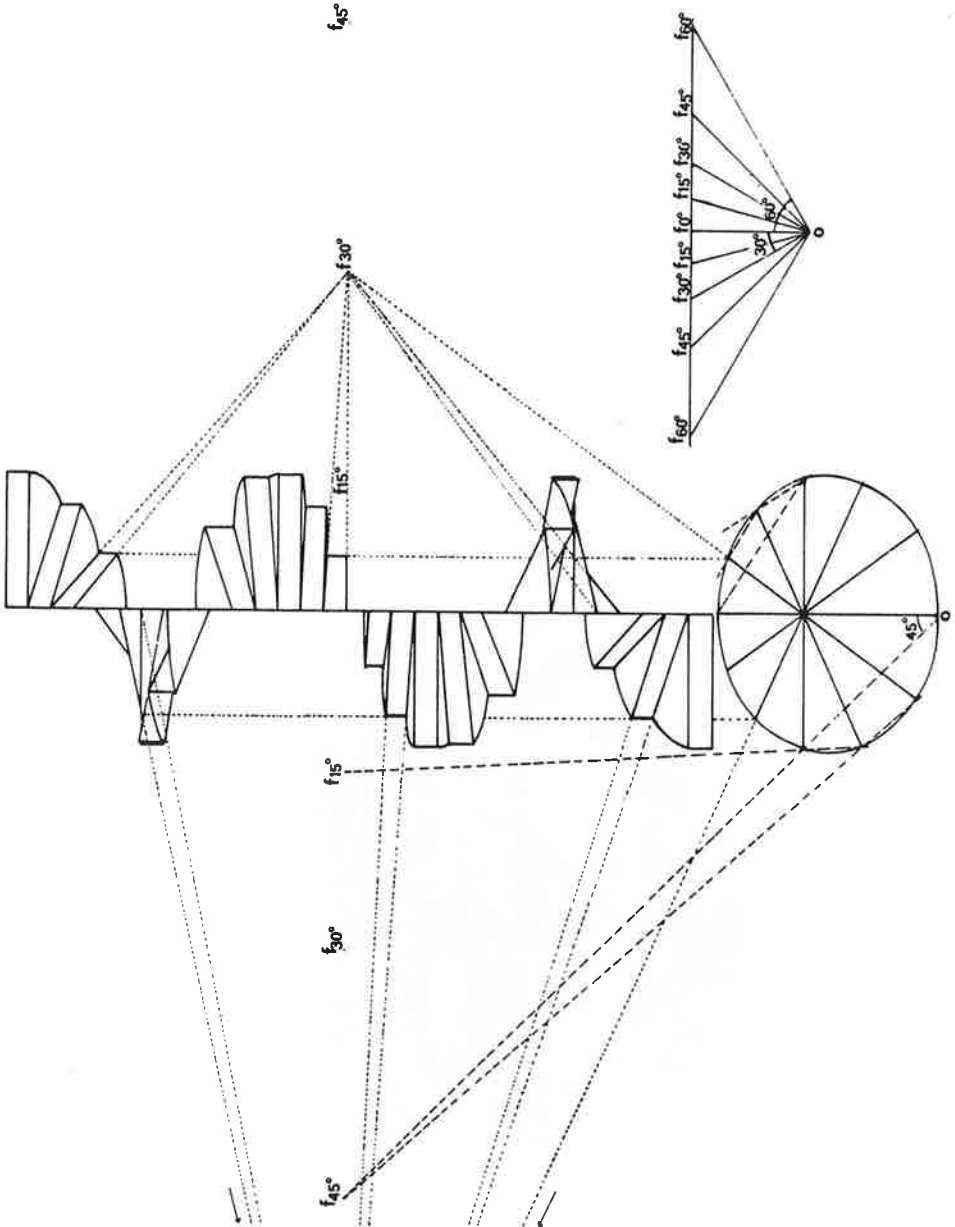


Fig. 163





Fig. 164

Jan Vredeman de Vries, 1604-1605, cité par P. Descargues (1976).

Et encore bien d'autres formes si vous voulez ...

Le monde des formes est infini. Voici quelques indications supplémentaires pour vous donner l'envie d'en dessiner de nouvelles.

Certains polyèdres peuvent être dessinés en perspective à partir du cube. Il suffit, par exemple, de joindre le milieu de chaque face d'un cube pour obtenir un octaèdre (Fig. 165). On peut également obtenir des polyèdres étoilés en faisant passer des plans bien choisis par les sommets du cube ou par les milieux de ses arêtes et de ses faces (Fig. 166 et 167).

On trouve, dans le livre de P. Descargues (1976), des dessins de toutes sortes (demi-coupole, formes géométriques diverses, escaliers, voûtes ...) tirés de divers traités de perspective. La Fig. 168 en est un. Sur la façon de dessiner ces divers objets géométriques, voir Bonbon (1983), (3) et (4).

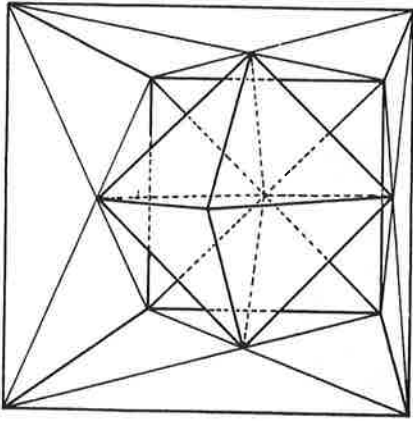


Fig. 165  
L'octaèdre

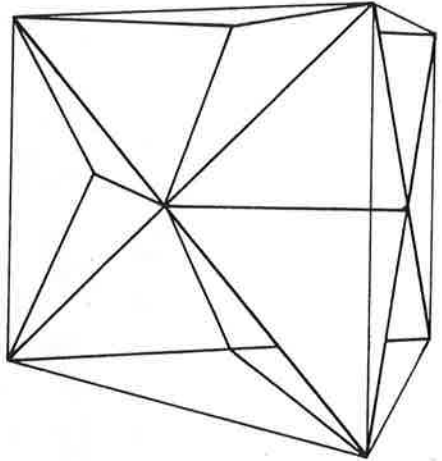


Fig. 166  
L'octaèdre étoilé

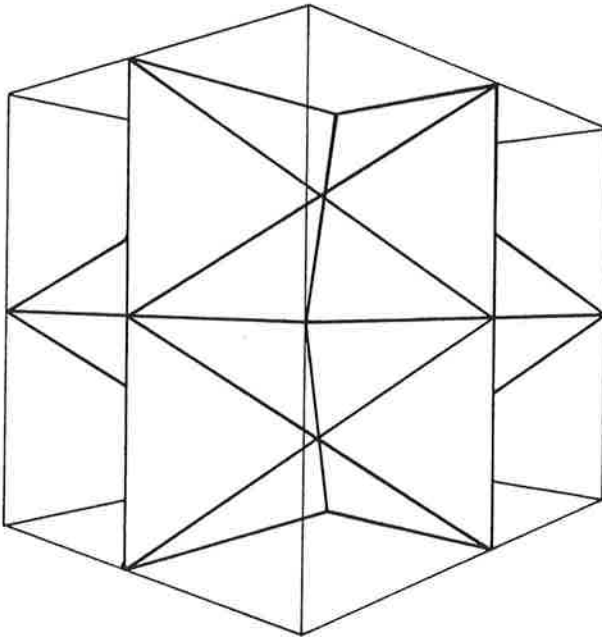


Fig. 167



Fig. 168

Mathias Zyndt (dans Hans Lenker, 1571, cité par P. Descargues (1976)).

### 3. LE PERSPECTOGRAPHE

Un *perspectographe* est un appareil composé de barres métalliques articulées, d'une pointe sèche et d'une pointe traçante. Il permet d'obtenir l'image en perspective d'un dessin donné ou, plus précisément, d'obtenir une figure semblable à l'image en perspective, sur un plan vertical, d'un dessin donné dans un plan horizontal. On l'utilise en suivant, avec la pointe sèche, les traits de la figure donnée (par exemple, la sinusoïde de la Section 1), ce qui amène la pointe traçante à dessiner l'image de cette figure (Fig. 171). On peut trouver dans la brochure de R. Laurent la description du *perspectographe* inventé en 1752 par J.-H. Lambert.

Soit  $\pi$  le plan vertical de projection,  $\pi_h$  le plan horizontal et  $H$  la hauteur de l'oeil au dessus de  $\pi_h$ . Nous appellerons la droite d'intersection de  $\pi$  et  $\pi_h$ , la *ligne de terre* (Fig. 169).

Considérons un point  $a$  du plan  $\pi_h$  et  $a_t$ , sa projection orthogonale sur  $\pi$ . La construction de notre perspectographe est basée sur le fait que l'image  $a'$  de  $a$  se trouve à l'intersection de  $oa$  et de  $pa_t$ .

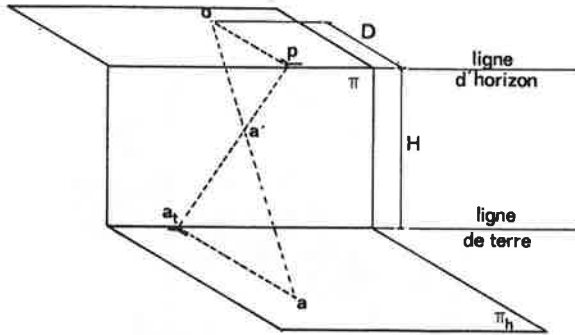


Fig. 169

Redessinons la situation de la Fig. 169 vue sous un autre angle de telle sorte que toutes les longueurs ( $|a a_t|$ ,  $D$ ,  $H$ , ...) soient en vraie grandeur; nous obtenons<sup>19</sup> la Fig. 170 qui est le schéma de notre perspectographe. Il nous reste à remplacer les droites  $oa$ ,  $pa_t$ ,  $a_t a$  et la ligne de terre par des tiges métalliques et les points  $o$ ,  $p$ ,  $a$ ,  $a_t$ ,  $a'$  par des clous ou pointes appropriées (Fig. 171).

<sup>19</sup> La Fig. 170 est le résultat d'une projection parallèle dont le plan de projection est parallèle à  $\pi$  et dont les rayons projetant forment un angle de  $45^\circ$  avec  $\pi$  et  $\pi_h$ .

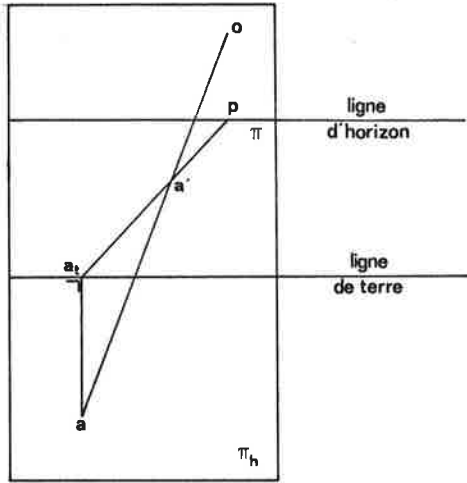


Fig. 170

LEGENDE de la Fig. 171.

 latte mobile.

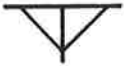
 coulisse.

⊙ pivot fixe par lequel passe une latte.

○ pivot parcourant une coulisse et par lequel passent deux lattes mobiles.

▽ pointe sèche (mobile) par laquelle passent deux lattes mobiles.

▽ pointe traçante (mobile) par laquelle passent deux lattes mobiles.



mécanisme servant à conserver un angle droit entre la

coulisse et la latte mobile a a<sub>1</sub>.

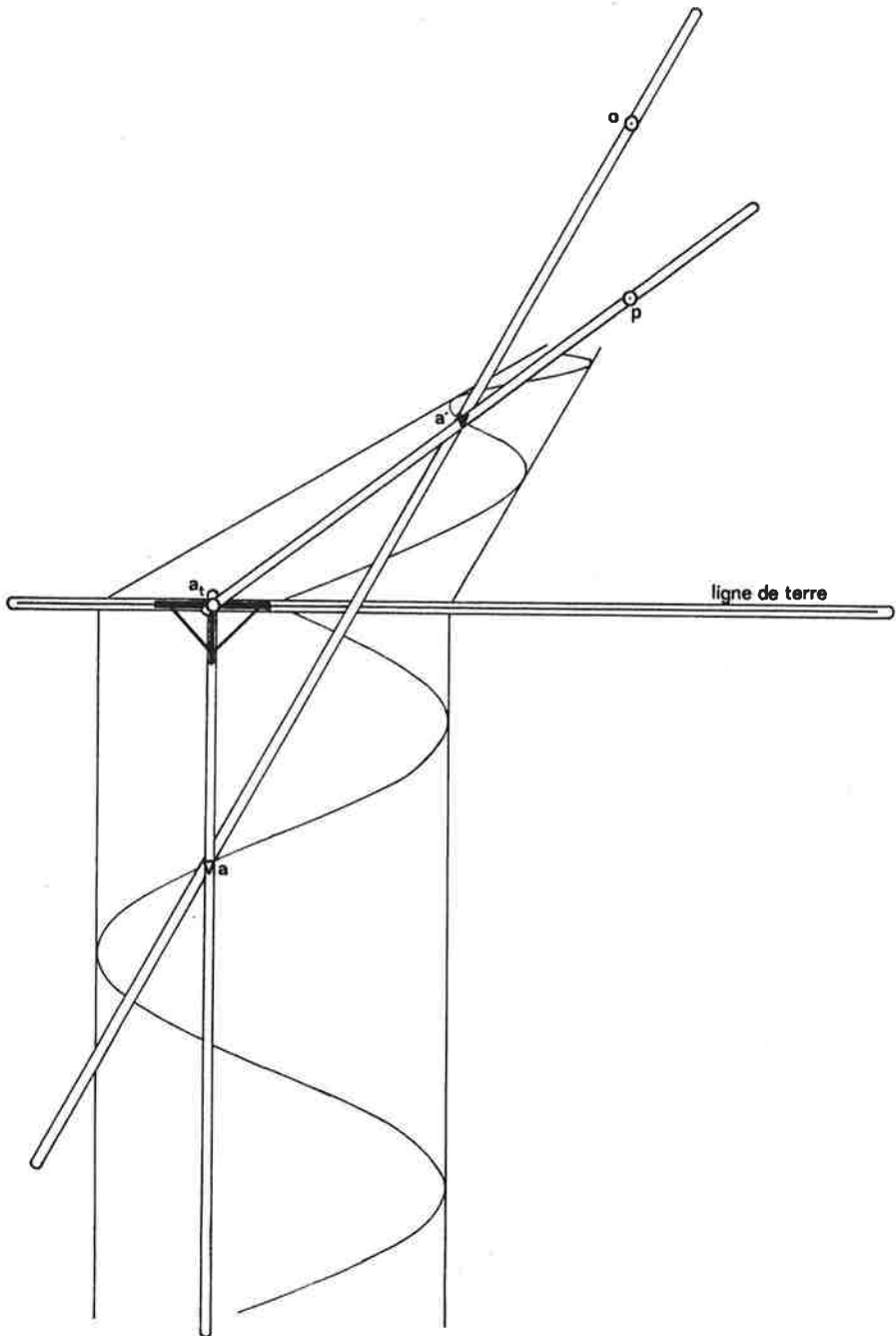


Fig. 171  
Voir légende p.133

## CHAPITRE 7

# VISION ET PERSPECTIVE

### 1. COMMENT VOYEZ-VOUS CA ?

Un des objectifs de cette section est d'amener le lecteur à s'interroger sur la validité de la représentation en perspective centrale.

Ce qui nous fait remettre en question ce système de représentation est un dessin en perspective centrale qui ne paraît pas très réaliste (Fig. 172) : représente-t-il vraiment la réalité comme nous la voyons ? Pour répondre à cette question, il faut d'abord savoir comment nous voyons. C'est pourquoi une partie des problèmes posés concerne la vision.

Nous n'irons pas jusqu'à expliquer de façon précise le phénomène de la vision, mais le travail proposé peut être le point de départ d'une discussion ou d'une étude approfondie sur ce sujet ou sur un de ceux qu'il touche (parfois de loin) : le fonctionnement de l'œil, la psychologie de la forme, le rapport entre la vision et la perspective, d'autres modes de représentation, etc.

Dans ce travail, les discussions ou réflexions à propos des questions posées nous semblent aussi importantes que les réponses. Certaines de ces questions n'ont d'ailleurs pas de réponse nette et sembleront mal posées (c'est voulu), mais il n'est pas inutile d'y réfléchir afin, peut-être, de les remplacer par de "meilleures" questions.

La grandeur apparente.

La grandeur apparente d'un objet varie selon la position qu'il occupe par rapport à nous : vus du haut d'une tour, les gens paraissent tout petits.

Comment définiriez-vous la grandeur apparente d'un objet (ce dont il est question ici n'est pas l'estimation de la grandeur réelle) ? De votre point de vue, la lune est-elle plus ou moins grande qu'une balle de ping-pong ?

Pensez-vous qu'il soit équivalent de définir la grandeur apparente en termes d'angle de vue ou de grandeur de l'image rétinienne ?

D'un point de vue historique.

L'optique géométrique d'Euclide (III<sup>e</sup> siècle avant J.C.) et de Ptolémée (II<sup>e</sup> siècle après J.C.) repose toute entière sur l'hypothèse suivante : l'oeil émet un faisceau divergent de rayons visuels qui se propagent en ligne droite et vont percevoir les objets qui les arrêtent (A. Lejeune, 1948).

Euclide base la perception de la grandeur d'un objet sur un seul élément : l'angle sous lequel on le voit : "les grandeurs vues sous un plus grand angle apparaissent plus grandes; tandis que celles qui sont vues sous un plus petit angle apparaissent plus petites, et que celles qui sont vues sous des angles égaux apparaissent égales" (P. Ver Eecke, 1938). Il connaît l'effet sur l'angle visuel de la distance et éventuellement de l'orientation d'un objet (par exemple, l'inclinaison d'un bâton), mais il pense que ces deux données ne peuvent être saisies par la vue (A. Lejeune, 1948).

Par contre, selon Ptolémée (cf. A. Lejeune, 1948, cité ici en substance), nous avons conscience de la longueur des rayons visuels qui tombent sur les objets. Nous avons donc la sensation de l'éloignement et de l'orientation des objets. En outre, toujours selon Ptolémée, une longue habitude nous a accoutumés à estimer les effets de l'éloignement et de l'orientation d'un objet sur sa grandeur apparente et nous arrivons à restituer la grandeur vraie.



"Chez les Renaissants", écrit P. Thuillier (1984), sans attribuer cette opinion à un auteur en particulier, "un objet "deux fois plus grand" est un objet dont la mesure sur le plan de projection est deux fois plus grande; alors que, selon la conception angulaire d'Euclide, un objet deux fois plus grand est un objet qu'on voit *sous un angle deux fois plus grand*".

Qu'en pensez-vous ?

Le problème des colonnes.

Voici dessinées en perspective centrale, cinq colonnes alignées toutes de même largeur et de même hauteur (Fig. 172).

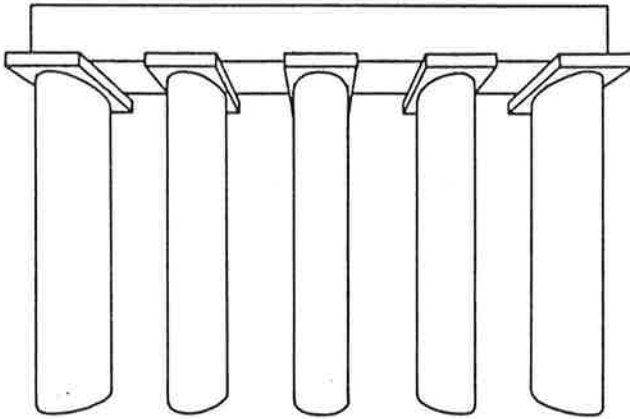


Fig. 172

a) Expliquer pourquoi les images des colonnes n'ont pas toutes la même largeur. Et si les colonnes étaient plates plutôt que cylindriques ?

b) Si vous vous placez à peu près au même endroit que le dessinateur (soit en face de la colonne du milieu), verrez-vous les colonnes latérales plus larges que la colonne centrale ? Qu'en est-il de leur hauteur apparente ?

c) Pourriez-vous représenter les cinq colonnes de façon à ce que votre dessin soit plus fidèle à notre vision que celui

de la Fig. 172 ? Et si, au lieu de n'être que cinq, elles étaient mille ?

d) Comment expliquez-vous que, malgré l'écart qui existe entre notre vision et la représentation plane en perspective centrale, celle-ci soit quand même considérée comme réaliste ? Pourriez-vous trouver un mode de représentation qui soit plus fidèle que celui-là à notre perception de l'espace ?

e) Comment l'image rétinienne d'une colonne se modifie-t-elle si on la fixe, puis qu'on fixe un point à côté d'elle ?

f) Si vous prenez comme principe qu'un objet doit être dessiné avec une taille proportionnelle à l'angle sous lequel il est vu (selon le principe d'Euclide), vous arrivez peut-être à une représentation comme celle de la Fig. 173. Mais comment tenez-vous compte du fait que le dessus d'une colonne est plus loin que son centre ? Et les espaces entre les colonnes ?

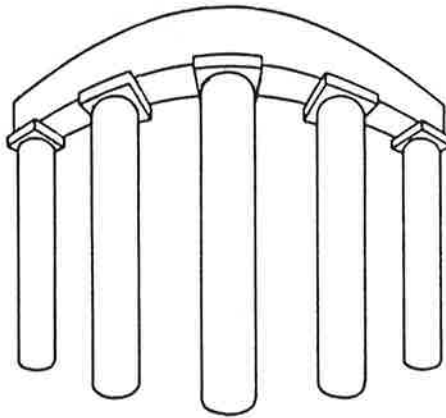


Fig. 173

g) La perspective centrale est une projection sur un plan. Mais, dans les réflexions que l'on a faites à son sujet, apparaissent naturellement deux surfaces de forme sphérique : une demi-sphère située devant l'oeil et dont l'oeil occupe le centre et la sphère de l'oeil lui-même. Est-ce qu'une projection sur l'une ou l'autre de ces deux sphères vous semble pouvoir inspirer une représentation plus fidèle de la réalité ?

La grandeur apparente. Solution.

Dans cette sous-section et les deux suivantes, nous ne donnons en guise de solutions, que les réflexions que ces problèmes ont inspirées aux personnes à qui nous les avons posées, car les questions posées n'ont pas toute une réponse unique et précise.

Commençons par examiner la deuxième question (comparaison de deux grandeurs apparentes), cela nous aidera à nous faire une idée de ce que pourrait être la grandeur apparente.

Pour comparer la grandeur apparente de la lune à celle d'une balle de ping-pong, certains placent celle-ci "devant" la lune en fermant un oeil. Si la lune n'est pas tout à fait cachée par la balle, ils disent que son image apparente est plus grande que celle de la balle. Par contre, si elle est tout à fait cachée, alors son image est plus petite ou égale à celle de la balle.

Reste à savoir à quelle distance on doit placer la balle de ping-pong. Plus elle est éloignée de nous, plus son image apparente est petite. Elle peut donc paraître plus grande ou plus petite que la lune selon la distance à laquelle on la place ...

Une autre façon de comparer les deux grandeurs apparentes est de les "mesurer" à l'aide d'un crayon tenu à bout de bras comme le font certains peintres.

Pour beaucoup de gens, la grandeur apparente d'un objet est directement liée à l'angle sous lequel on le voit. Cela revient quasiment à imaginer que nous voyons les éléments qui nous entourent comme s'ils étaient projetés sur une sphère centrée sur l'oeil et que leur grandeur apparente est la grandeur de leur image sur la sphère.

Pour d'autres, la grandeur apparente d'un objet est la grandeur de son image rétinienne.

Comparons ces deux points de vue. Nous savons que l'oeil est à peu près sphérique et qu'il fonctionne comme un appareil photographique dont le diaphragme est l'iris et la plaque sensible, la rétine (Fig. 174).

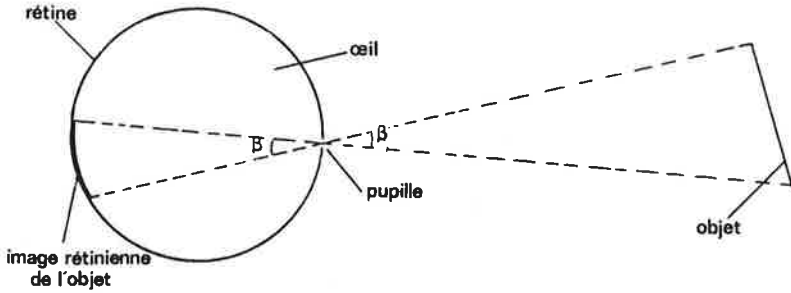


Fig. 174

Le phénomène de la vision passe donc par une projection centrale sur la sphère de l'oeil, le centre de projection (la pupille) étant situé sur cette sphère. L'image d'un objet par cette projection est ensuite transmise au cerveau qui l'interprète. Partons de ce modèle pour redéfinir en termes d'angle de vue la grandeur apparente d'un objet à partir de la définition concernant la grandeur de l'image rétinienne.

Rappelons que, dans un cercle, l'angle au centre  $\alpha$  interceptant un arc C vaut le double des angles  $\beta$  interceptant le même arc et dont le sommet est sur le cercle (Fig. 175). Donc, si R est le rayon du cercle,

$$\begin{aligned} C &= R \cdot \alpha, \\ &= R \cdot 2\beta. \end{aligned}$$

La grandeur de C est donc directement proportionnelle à l'angle  $\beta$  qui l'intercepte et qui a son sommet sur le cercle.

Si on applique ce résultat au modèle de l'oeil représenté à la Fig. 174, on obtient que la grandeur de l'image rétinienne d'un objet est directement proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit.

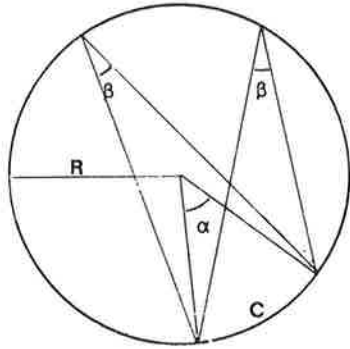


Fig. 175

En fait, le cheminement qui nous a amenés à conclure cela n'est pas correct : au lieu de travailler dans l'espace avec une sphère, nous avons construit notre raisonnement sur des figures représentant des cercles dans un plan. Pour comprendre notre erreur, il nous faut sortir du plan.

Sur la Fig. 176, les objets A et B sont vus sous le même angle  $\beta$  mais leurs images rétiniennes, C et D, n'ont pas la même grandeur. En effet, l'image de l'objet A est sur un grand cercle de l'oeil alors que celle de B est sur un cercle plus petit. La construction des deux images sur les deux cercles est reprise aux Fig. 177 et 178.

La grandeur de l'image rétinienne d'un objet ne dépend donc pas uniquement de l'angle sous lequel on le voit mais aussi de la place qu'il occupe dans le champ visuel.

D'un point de vue historique. Solution.

La Fig. 179, provenant de l'ouvrage d'Abraham Bosse (1611-1678), montre bien la différence entre l'avis d'Euclide et celui des Renaissants sur le phénomène de la grandeur apparente. La hauteur de la statue est divisée en six parties égales. Celles-ci sont vues sous des angles différents mais leurs images sur

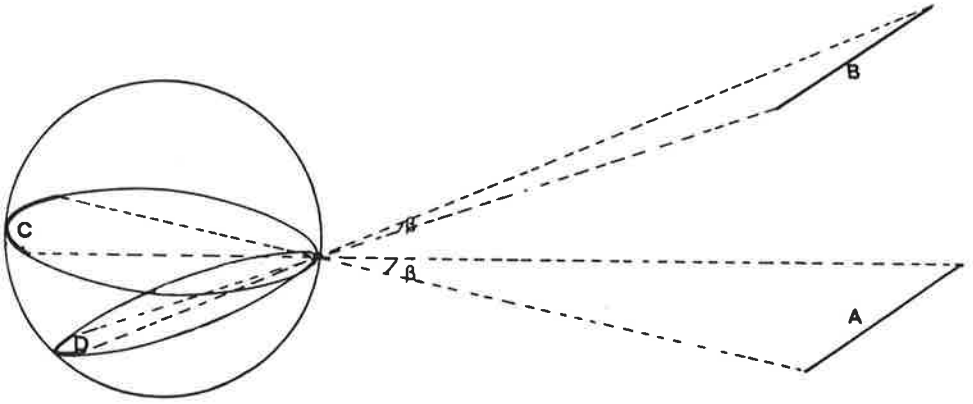


Fig. 176

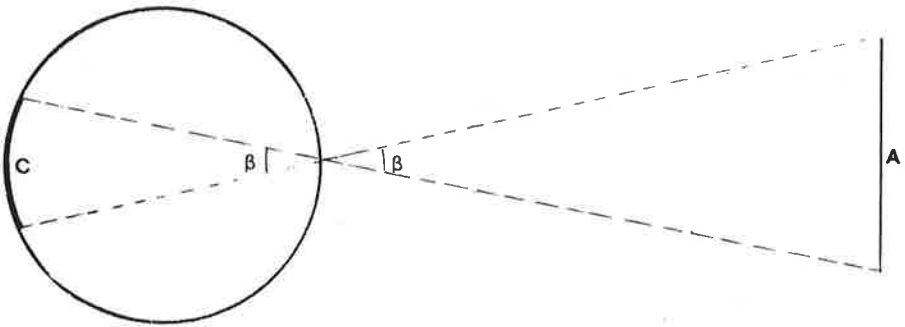


Fig. 177

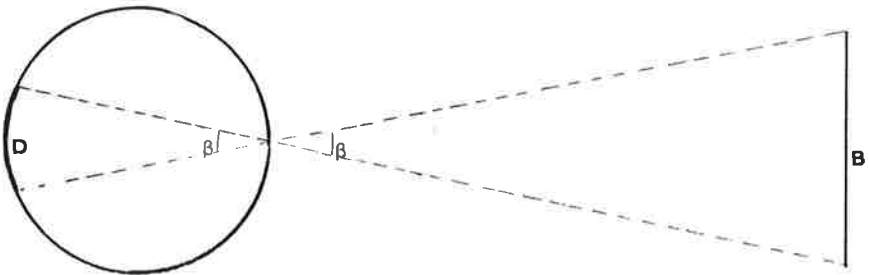


Fig. 178

un plan de projection vertical (représenté par un segment vertical) sont toutes de même grandeur. Selon P. Thuillier, les Renaissants n'avaient pas la même notion de grandeur apparente qu'Euclide. Pourtant, Dürer explique, dans son traité

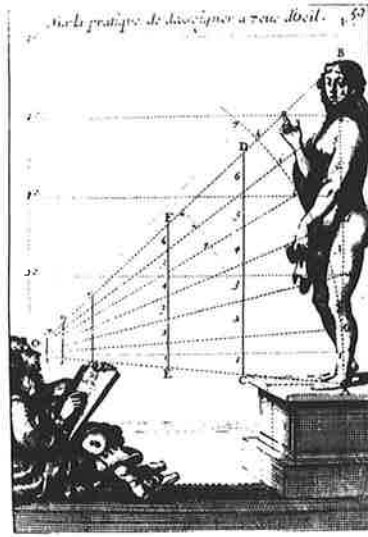


Fig. 179

de 1525, les dimensions qu'il faut donner aux inscriptions murales pour que chaque ligne soit vue sous le même angle (Fig. 180). Le *Jugement Dernier* (1535-1541) de Michel-Ange dans la Chapelle Sixtine à Rome a été peint selon le même principe.

Selon Ptolémée, nous pouvons toujours restituer la grandeur vraie d'un objet à partir de sa grandeur apparente, car nous sentons la distance qui nous en sépare. Il est vrai que nous avons souvent une bonne idée de cette distance, mais n'est-ce pas justement grâce à la connaissance des grandeurs réelle et apparente des objets ? De plus, les illusions d'optique et les trompe-l'oeil nous montrent que l'estimation de cette distance n'est pas toujours bonne. Et on se rend à nouveau compte que le cerveau tient un rôle très important dans ce domaine aussi.

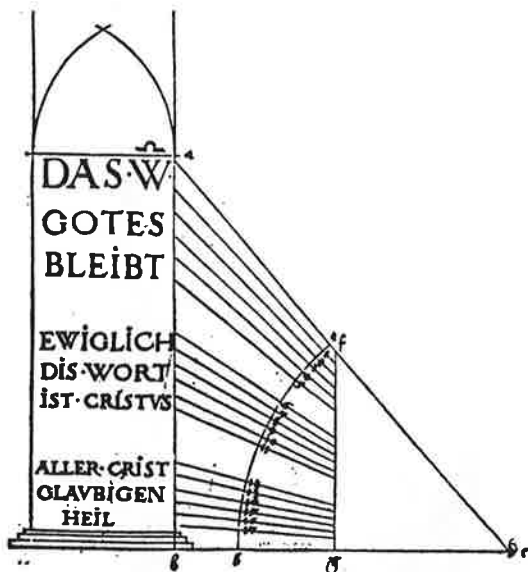


Fig. 180

L'exemple de la lune (ou du soleil) paraissant plus grosse à l'horizon qu'au zénith le montre également. On explique ce phénomène par le fait que la lune paraît plus éloignée à l'horizon à cause des choses (arbres, bâtiments, ...) qui s'interposent entre elle et nous et qui nous rendent plus conscients de la grande distance qui nous en sépare. Et comme elle est toujours vue sous un même angle ( $0,5^\circ$ ), elle paraît donc plus grosse à l'horizon. Sur ce problème, lire M. Merleau-Ponty (1945) p. 300, G. Toraldodì Francia (1981) pp. 104-105 et Voltaire (1784) pp. 120-125 (l'explication de Voltaire n'est pas exactement la même que celle exposée ici) et sur celui de la vision de la profondeur, lire M. Merleau-Ponty (1945) pp. 294 et suivantes.

On peut trouver différentes opinions des Anciens sur les rayons visuels dans D. Pedoe (1976), celle de R. Descartes (1966) (pp. 180 et suivantes) est également intéressante.



Le problème des colonnes. Solution.

a) La Fig. 181 représente la situation vue du dessus; le dessinateur est en face de la colonne du milieu, comme le suggère la Fig. 172. La Fig. 181 permet de voir que l'image B' de la colonne B sur le plan de projection est plus large que l'image A' de la colonne A.

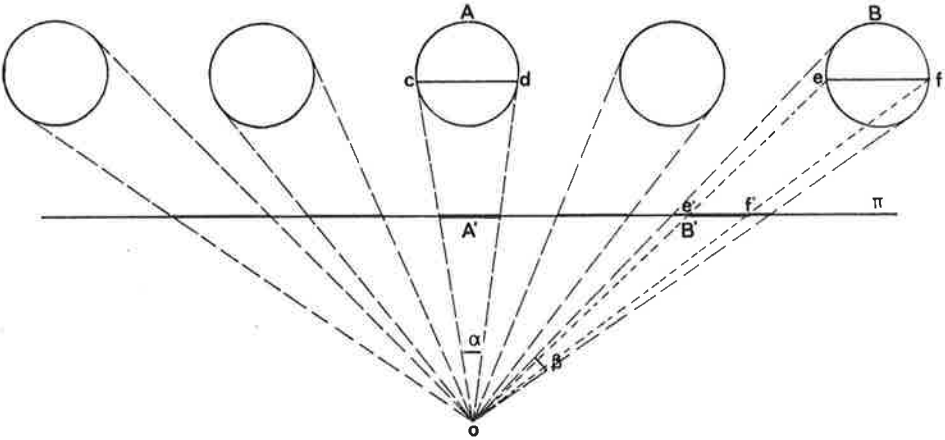


Fig. 181

Pourtant la colonne B est plus éloignée de  $o$  que la colonne A. L'angle  $\beta$  interceptant la colonne B est donc plus petit que l'angle  $\alpha$  interceptant la colonne A, ce qui aurait pour effet de rendre B' moins large que A'.

Mais considérons le segment  $[cd]$  de la colonne A intercepté par l'angle  $\alpha$  et le segment  $[ef]$  correspondant sur la colonne B. Par le théorème de Thalès, les images de ces deux segments sur le plan de projection ont même grandeur. Or, le segment  $[ef]$  est entièrement compris dans le secteur de l'angle  $\beta$ . L'image de la colonne B est donc plus grande que celle du segment  $[ef]$  et donc que celle de la colonne A.

Si les colonnes étaient des pilastres (colonnes plates), leurs images auraient toutes la même largeur. On peut le voir sur la Fig. 182 représentant la situation du dessus et le prouver par le théorème de Thalès.

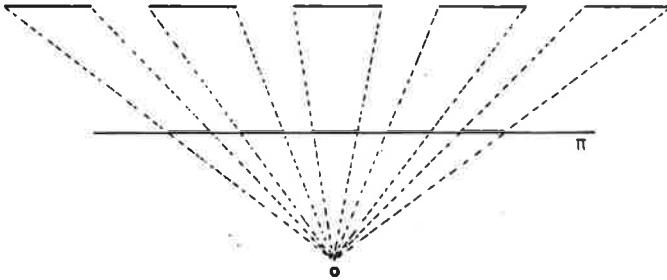


Fig. 182

Par contre, si les colonnes plates étaient perpendiculaires au plan de projection (Fig. 183), la largeur de leur image croîtrait au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la colonne centrale.

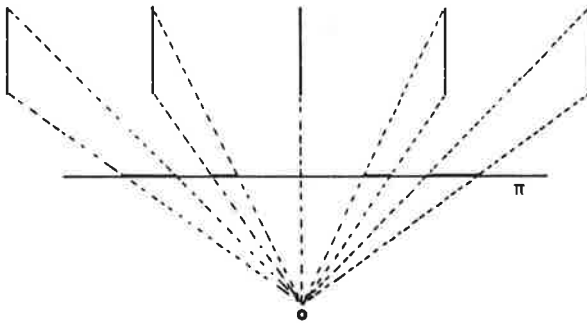


Fig. 183

Ceci montre, en quelque sorte, que les différences de largeur entre les images des colonnes sont dues à leur dimension dans le sens de la profondeur. Remarquons que des colonnes à section carrée, quand on les dessine en perspective, paraissent moins déformées que des colonnes cylindriques (Fig. 184); pourtant la différence de largeur est encore plus grande.

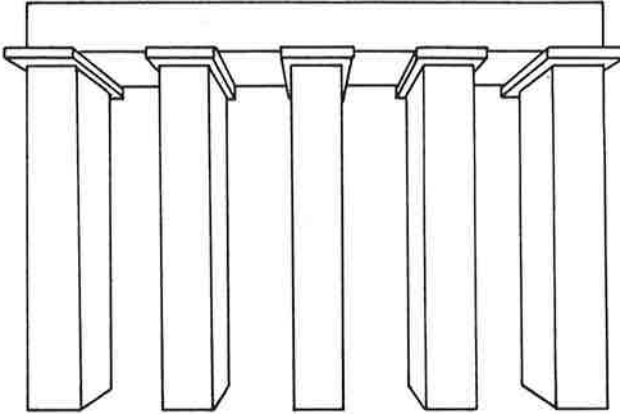


Fig. 184

b) Selon le principe "ce qui est plus loin paraît plus petit", les colonnes latérales sembleront plus petites et plus minces vues de la place occupée par le dessinateur.

c) Si nous nous basons sur la réponse précédente, nous pouvons dessiner les cinq colonnes comme à la Fig. 173, par exemple. La Fig. 185 montre une façon de dessiner les colonnes si elles sont mille.

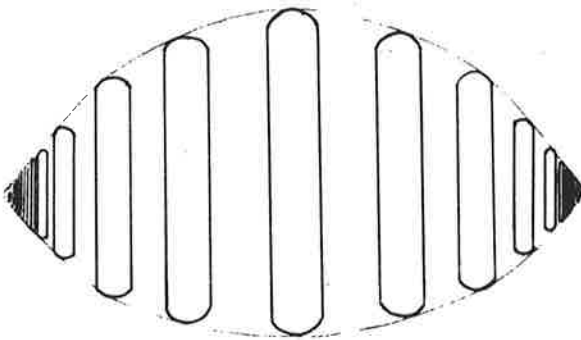


Fig. 185

d) Pour qu'un dessin en perspective centrale paraisse réaliste, il faut que l'observateur le regarde du centre de projection du tableau, c'est-à-dire du point de vue.

Comme nous l'avons vu au Chap. 2, Section 5, la distance de l'oeil au tableau doit être égale à la distance  $|p f|$ ,  $f$  étant le point de fuite de droites formant un angle de  $45^\circ$  avec les perpendiculaires au tableau (Fig. 186). Le point de vue se situe donc face au point  $p$  à 3,4 cm du dessin.

Le dessin ne paraît donc réaliste que si on le regarde *en fermant un oeil et en laissant l'autre fixe à 3,4 cm du dessin, face au point  $p$* . Si ces conditions sont respectées (ce qui est assez difficile car l'oeil ne peut s'accomoder sur des distances très petites; toutefois, rien n'empêche de refaire l'expérience sur la Fig. 172 agrandie 10 fois, ce qui mettra l'oeil à 34 cm du tableau), les colonnes dessinées donneront la même image rétinienne que si elles étaient réelles.

En effet, si nous regardons une surface sur laquelle est projeté un objet, en fermant un oeil et en plaçant l'autre exactement au centre de la projection, nous recevons les rayons lumineux provenant de l'image de l'objet comme s'ils provenaient de l'objet lui-même (Fig. 187) et ceci quelle que soit la surface de projection (Fig. 188 et 189).

Ceci ne veut pas dire qu'un tableau en perspective centrale représente la réalité comme on la perçoit<sup>20</sup>; en effet, les colonnes latérales de la Fig. 172 sont dessinées plus larges alors qu'en réalité elles sont plus éloignées et sont donc perçues plus étroites. Néanmoins on perçoit un tableau en perspective centrale comme on percevrait la réalité qu'il représente, si on se place au bon point de vue; pour que cette coïncidence entre le dessin et la réalité soit réalisée à la Fig. 172,

---

<sup>20</sup> Remarquons que l'expression "représenter la réalité comme on la perçoit" est ambiguë, puisqu'on ne peut pas se rendre compte exactement des images que l'on reçoit de la réalité. Par contre, l'expression "voir un dessin comme on voit la réalité", dans ce contexte-ci, est bien définie.

il a fallu dessiner les colonnes latérales plus larges que les colonnes centrales : condition pour que, du point de vue, on les voit sous le bon angle c'est-à-dire plus petites et plus étroites que les colonnes centrales.

"Si tu opères de la sorte" (si tu te mets au bon point de vue), écrit Léonard de Vinci (cité dans Panofsky, 1975, p. 47), "ton oeuvre, à condition d'avoir une heureuse répartition de la lumière et de l'ombre, ne manquera pas de produire l'impression de la réalité et tu n'arriveras pas à croire que ce sont là choses peintes".

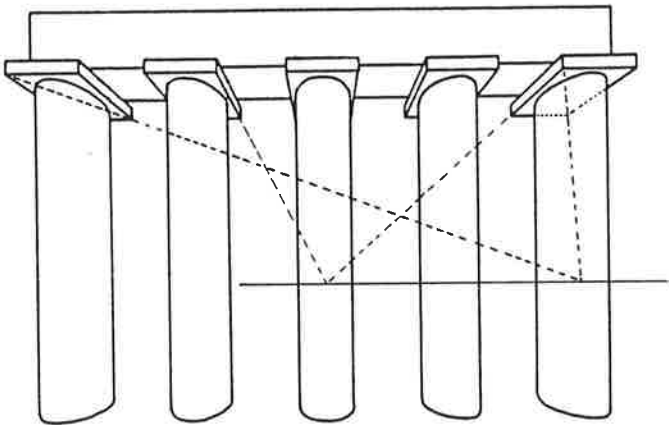


Fig. 186

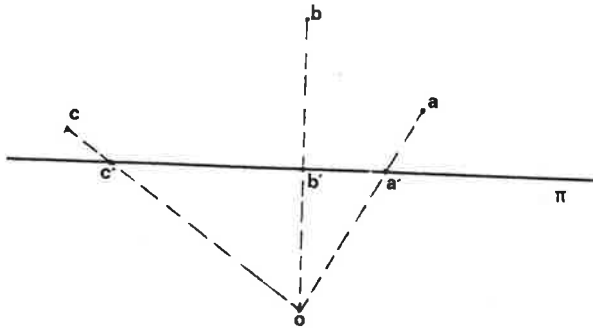


Fig. 187

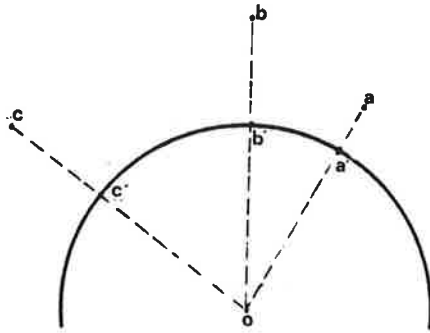


Fig. 188

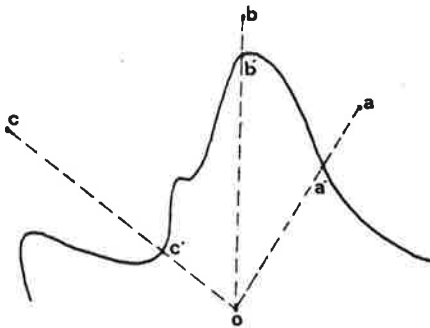


Fig. 189

Mais si nous modifions la forme de la surface sur laquelle on a projeté, par exemple si nous déroulons un cylindre dont l'axe passe par le point de vue (Fig. 190), les images des objets représentés n'occuperont plus la même place dans le champ visuel et ne donneront donc plus la même image rétinienne que les objets eux-mêmes.

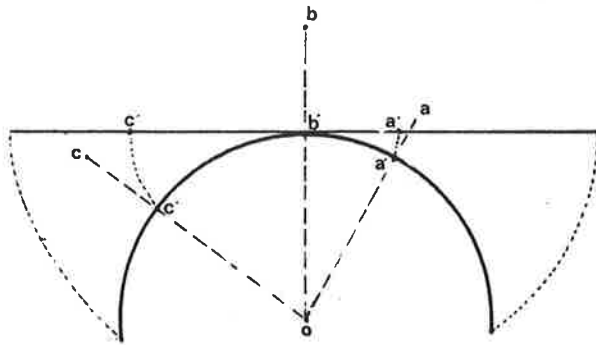


Fig. 190

La Fig. 173 résulte d'une projection centrale sur une surface cylindrique que l'on a ensuite déroulée pour obtenir un dessin plan (Fig. 191). Elle est *peut-être* plus fidèle à notre perception que la Fig. 172 (les colonnes plus éloignées sont dessinées plus petites et plus minces) mais en aucun cas les colonnes ne peuvent nous apparaître comme si elles étaient réelles. En effet, si nous nous plaçons en face de la colonne **centrale**, les colonnes latérales paraîtront plus petites pour deux raisons : d'une part, on les a dessinées plus petites et, d'autre part, leur image est plus éloignée de nous que l'image de la colonne centrale. Elles nous apparaîtront donc encore plus petites que les images qu'on aurait en regardant les colonnes latérales réelles.

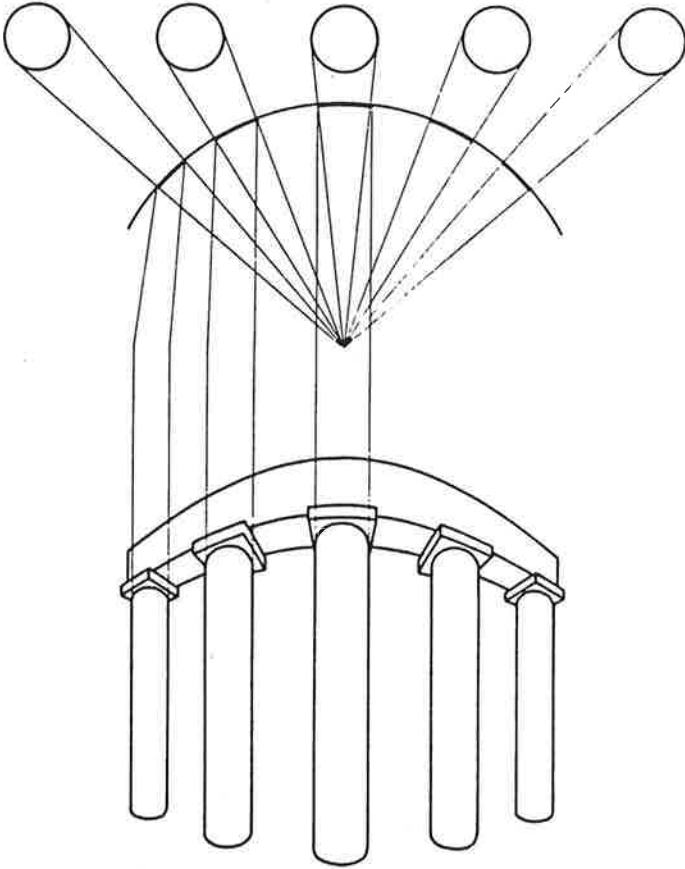


Fig. 191

e) Nous avons vu, en nous interrogeant sur la grandeur apparente, que la grandeur de l'image rétinienne d'un objet ne dépend pas uniquement de l'angle sous lequel on le voit, mais aussi de la place qu'il occupe dans le champ visuel.

Si on fixe une colonne, son image s'inscrit sur un grand cercle du globe oculaire; si on fixe un point à côté d'elle, son image s'inscrit sur un cercle plus petit. Son image rétinienne est donc plus grande quand on la fixe que quand on fixe un point à côté d'elle.



Par contre, si on regarde au-dessus d'elle, son image rétinienne est de même grandeur que si on la fixe. En effet, l'image reste dans le même grand cercle du globe oculaire et l'angle sous lequel on voit la colonne ne change pas (si on assimile les colonnes à des segments).

Mais est-ce que le fait que l'image rétinienne de la colonne soit plus petite quand on regarde à côté d'elle nous donne l'impression qu'on la voit plus petite et donc que son image apparente est plus petite ? C'est difficile sinon impossible à dire, d'autant plus que la partie de la rétine pour laquelle les images sont nettes est très petite (on dit souvent que le champ de vision nette n'est que de deux degrés).

Ceci montre aussi que l'impression des images sur la rétine n'est qu'une partie du phénomène de la vision et que l'action interprétative du cerveau joue un rôle très important et très complexe (voir à ce sujet M. Merleau-Ponty, 1945, E.H. Gombrich, 1959, R. Klein, 1970, P. Guillaume, 1979, W. Koehler, 1964, ...).

f) et g) Si nous tenons compte du fait que le dessus d'une colonne est plus loin que son centre, nous devons représenter le haut et le bas des colonnes plus étroits que le milieu, comme à la Fig. 192.

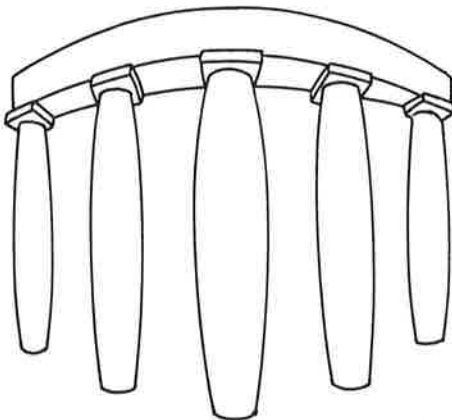


Fig. 192

Mais, si nous faisons la même chose pour les espaces entre les colonnes, le dessin ne représente plus du tout ce que nous voyons (Fig. 193).

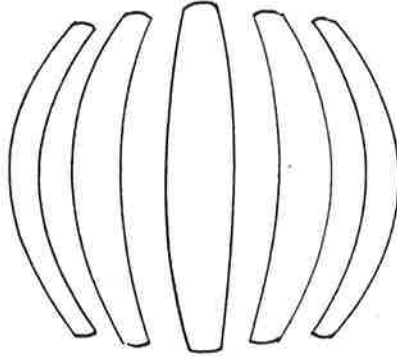


Fig. 193

En fait, le principe d'Euclide revient à représenter l'espace en le projetant sur une sphère centrée sur l'œil. L'image d'un objet sera alors de grandeur proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit.

L'avantage d'une telle représentation, par rapport à la projection sur un cylindre, est qu'on ne privilégie aucune direction; en effet, dans le cas de la projection cylindrique, il faut choisir la position du cylindre (horizontal, vertical, oblique, ...). Dans la Fig. 173, pour laquelle le cylindre de projection est vertical, la largeur des colonnes varie horizontalement (d'une colonne à l'autre) mais pas verticalement (pour une même colonne).

Mais la sphère ne peut pas être "déroulée" en un plan (contrairement au cylindre). Il est donc impossible de trouver un mode de représentation plane qui respecte exactement le principe d'Euclide.

La *perspective curviligne* est composée d'une projection sur un hémisphère centrée sur l'œil et d'une transformation de l'hémisphère en un disque dont le diamètre vaut la longueur

d'un demi grand cercle de l'hémisphère (A. Barre, A. Flocon, 1968). Cette transformation est appelée *projection de Guillaume Postel*; son principe est illustré par la Fig. 194 où l'arc  $pa$  est envoyé sur le segment  $[p'e]$  et l'image d'un point  $c$  sur  $pa$  est un point  $d$  sur  $[p'e]$  tel que la longueur de l'arc  $pc$  est égal à la longueur  $|pd|$ . Ce système permet d'obtenir un résultat qui ne déforme pas trop l'image projetée sur la sphère.

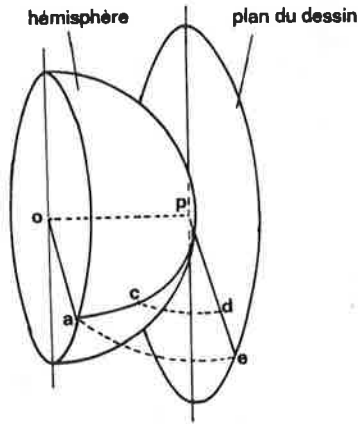


Fig. 194

La Fig. 195 montre un dessin en perspective curviligne.

"L'objectif photographique *fish-eye* donne des images semblables à celles obtenues par les procédés de construction de la perspective curviligne" (F. Dubery, J. Willats, 1983).

Quant à une représentation basée sur la sphère de l'oeil, vu ce qui est dit plus haut, il ne nous semble pas bon de l'envisager. Pourtant, on peut lire dans M. Dalai Emiliani (1980) : "A l'aube du XVIIe siècle, Léonard de Vinci ressent la nécessité d'un nouvel examen critique des fondements théoriques de la perspective et il dénonce l'écart existant entre cette dernière et l'expérience psychophysique de l'espace, pour s'engager directement dans l'étude d'un système de projection sur une surface curviligne en conformité avec la courbure rétinienne."



Fig. 195

Exemples de perspective cylindrique.

L'importance des déformations dans la Fig. 172 est due à la grandeur de l'angle sous lequel il faut regarder le dessin à partir du point de vue (plus de  $100^\circ$ ). La nécessité de peindre sous un grand angle apparaît notamment quand un artiste veut représenter une pièce dans laquelle il se trouve; en effet, s'il choisit un angle de vue petit, il ne peut représenter qu'une petite partie de la pièce.

Pour peindre sa "leçon de musique" (Fig. 135), il est possible que Vermeer se soit servi d'un miroir (F. Dubery, J. Willats, 1983); cela lui aurait permis de voir la partie de la pièce qu'il a peinte sous un angle plus petit (Fig. 197) que s'il l'avait dessinée en vue directe (Fig. 196).

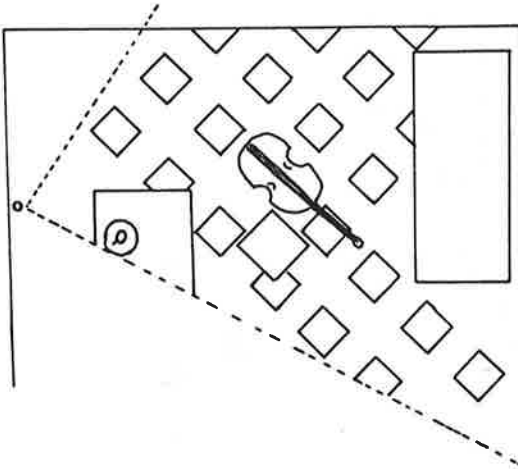


Fig. 196

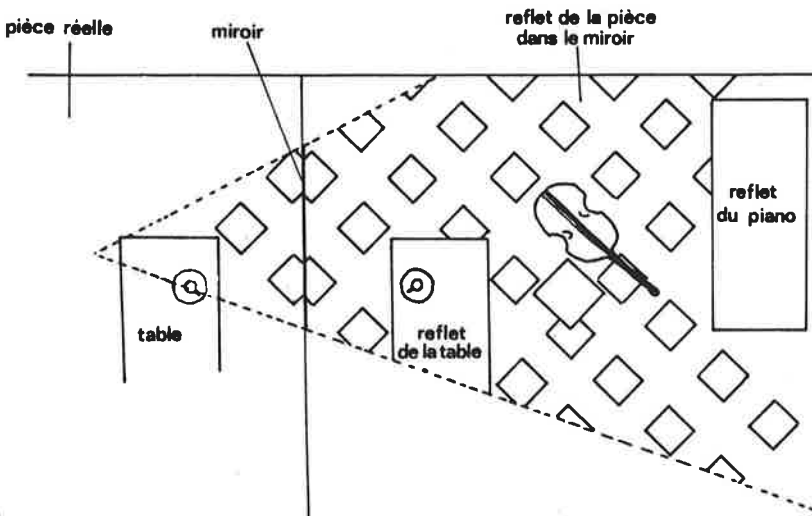


Fig. 197

Le tableau de Van Gogh (Fig. 198) représentant sa chambre a également dû être peint sous un grand angle (à peu près  $65^\circ$ ) (F. Dubery, J. Willats, 1983).



Fig. 198

*La chambre de Van Gogh à Arles* de Vincent Van Gogh, 1888.

Pour pouvoir peindre une assez grande partie de la pièce en évitant les déformations latérales dues à la perspective classique (centrale), Van Gogh semble avoir utilisé la perspective cylindrique. La Fig. 199 montre une vue du dessus de la chambre reconstituée à partir du tableau. Y sont indiqués aussi le point de vue et le cylindre de projection (F. Dubery, J. Willats, 1983).

Un procédé couramment utilisé pour dessiner est de mesurer la "taille apparente" des objets sur un crayon tenu à bout de bras. Pour obtenir une projection cylindrique, il faut maintenir le crayon sur un cylindre imaginaire (celui de la projection) dont l'axe passe par l'oeil. Mais comment savoir si Van Gogh a analysé ainsi la situation ? Toujours est-il que

son tableau ressemble fort au résultat (Fig. 200) de la projection définie à la Fig. 199.

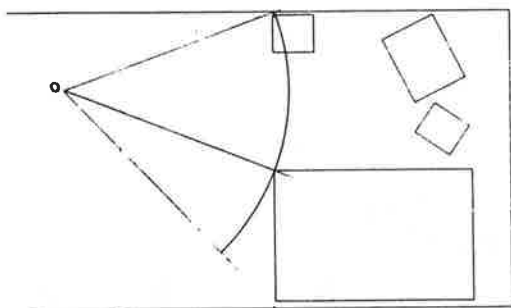


Fig. 199

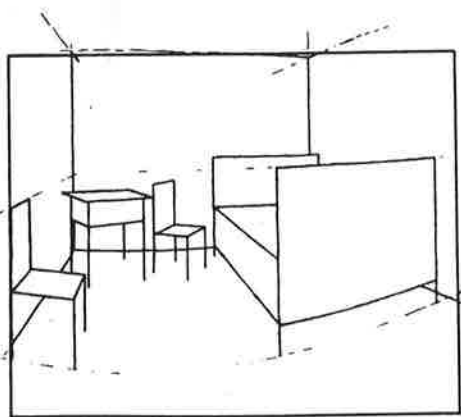


Fig. 200

Le tableau de la Fig. 201 de Jean Fouquet, semble également être le résultat d'une projection sur une surface courbe. Les lignes du pavement sont courbes; les maisons du centre sont frontales, celles de gauche sont dessinées de côté et de plus en plus petites.

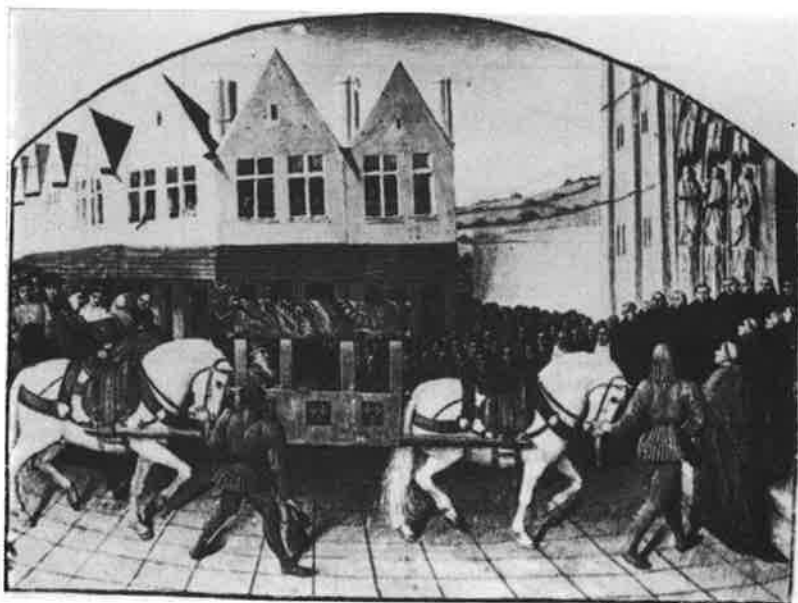


Fig. 201

*Entrée de l'Empereur Charles IV à Saint-Denis* de Jean Fouquet, Miniature des grandes chroniques de France, vers 1460, Bibliothèque Nationale de France.

## 2. ILLUSIONS D'OPTIQUE, TROMPE-L'OEIL ET ANAMORPHOSES

Nous ne faisons, en fait, qu'effleurer le sujet des illusions, trompe-l'oeil et anamorphoses, mais pour en connaître d'avantage vous pouvez recourir aux ouvrages cités dans cette section.

### Une illusion d'optique.

Parmi toutes les illusions d'optique, il en est qui peuvent être expliquées par les lois de la perspective. Pouvez-vous expliquer celle de la Fig. 202 ?



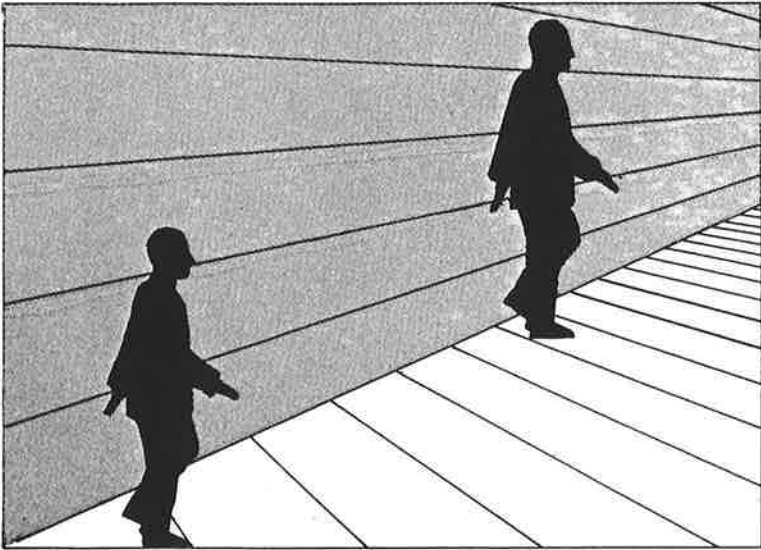


Fig. 202  
Lequel est le plus grand ?

La perspective curieuse.

Comme nous le disions à la Section 1, l'image d'un objet par une projection centrale sur n'importe quelle surface paraît réaliste si on la regarde en se plaçant au centre de la projection.

Si, comme à la Fig. 203, nous choisissons un plan de projection non perpendiculaire à la bissectrice de l'angle de champ  $\alpha$ , l'image d'un objet situé dans le secteur  $\alpha$  semblera irréaliste si on la regarde d'un autre point que le centre de projection  $o$ , par exemple si on se place face au centre du tableau comme on le fait généralement. L'image obtenue s'appelle alors *anamorphose*. La Fig. 204 en est une.

Certains peintres ont utilisé ce procédé pour représenter des scènes interdites ou licencieuses (cf. R. Laurent).

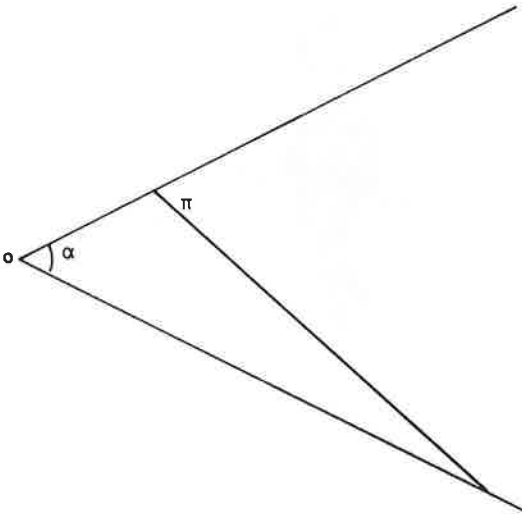


Fig. 203

Le second livre de l'ouvrage de J.F. Nicéron est consacré aux "moyens de construire plusieurs sortes de figures appartenantes à la vision droite, lesquelles hors de leur point sembleront difformes et sans raison, et veuës de leur point, paroistront bien proportionnées" (J.F. Nicéron, M. Mersenne, 1663).

Il existé aussi d'autres sortes d'anamorphoses : par exemple, des peintures ne paraissant réalistes que si on les regarde par réflexion sur un miroir cylindrique, conique ou autre. Le troisième livre de l'ouvrage de Nicéron traite de cela. Sur les anamorphoses, voir aussi J. Baltrušaitis (1969).

*Portrait secret de Charles I*

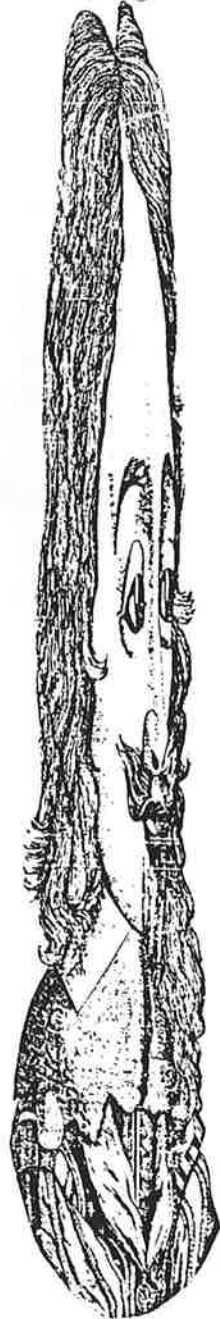


Fig. 204

*Portrait secret de Charles I, après 1649, Londres, Collection d'Antony d'Offay.*

Les trompe-l'oeil d'un point de vue historique.

Les bâtiments construits en trompe-l'oeil sont nombreux, surtout en Italie, comme en témoignent les nombreux exemples commentés du livre de M.L. d'Otrange Mastai (1975). En voici deux.

1. Le théâtre Olympique de Vicence.

L'avant-scène horizontale est limitée vers l'arrière par une façade comportant cinq portes. Derrière la Porte-Royale (la principale), apparaît une longue rue bordée de grands bâtiments (Fig. 205).

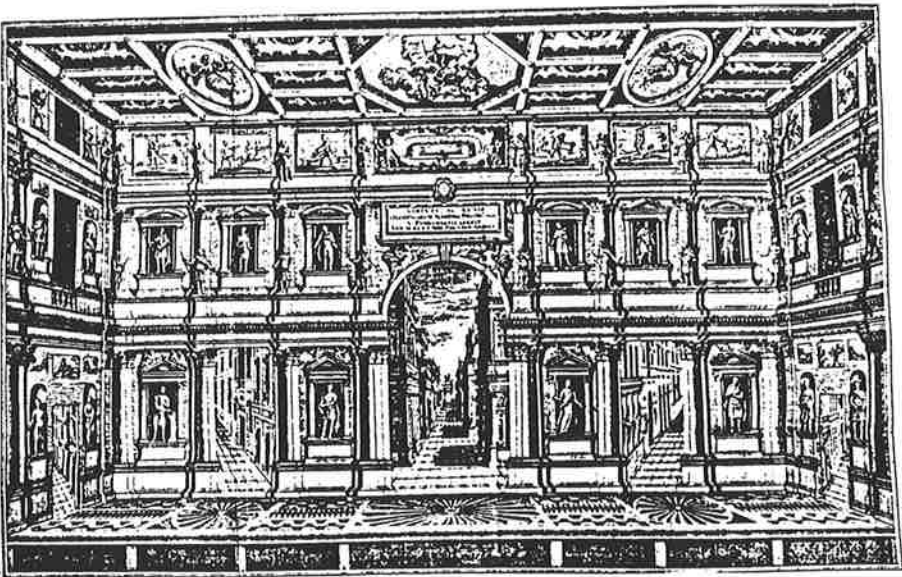


Fig. 205

Le théâtre Olympique de Vicence, 1580-85.

En réalité, la rue n'a que quelques mètres de long, mais elle a été construite (en 1580-85 par Palladio et Scamozzi) *en perspective accélérée* : le sol est incliné, les bâtiments sont de plus en plus petits et les bords de la rue convergent vers un point à hauteur du regard du spectateur (celui qui a

la meilleure place ...) (Fig. 206). Le spectateur (o) reçoit donc la même image rétinienne que si la rue était horizontale, à bords parallèles avec des maisons de même largeur et de même

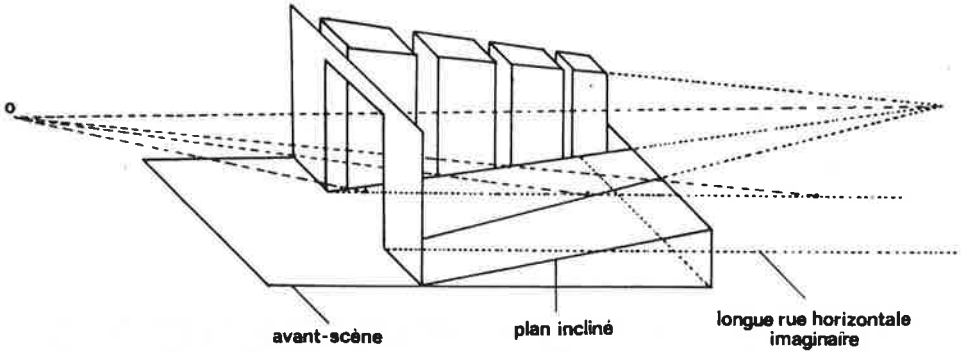


Fig. 206

hauteur. Comme le montre le plan du théâtre (Fig. 207), les rues en pente sont au nombre de sept; elles sont disposées de telle manière que chaque spectateur puisse au moins en voir une.

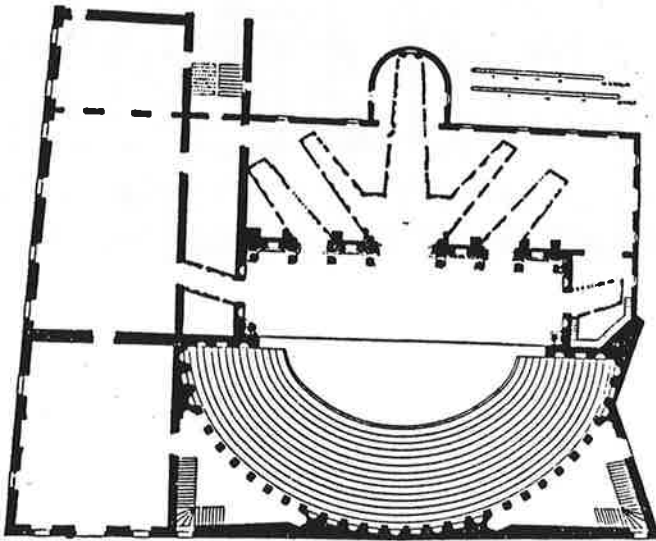


Fig. 207

Les acteurs marchant dans ces rues doivent calculer leur déplacement en faisant de plus petits pas lorsqu'ils sont au fond des rues, pour que le spectateur ait l'impression qu'ils avancent à vitesse constante dans une longue rue horizontale. Pour que l'illusion soit complète, ils devraient aussi changer de taille au fur et à mesure qu'ils avancent ...

2. La villa Spada à Rome.

L'architecte F. Borromini y a construit en 1635 un couloir de 8 m de long, créant l'illusion d'un tunnel beaucoup plus long vu de l'entrée (Fig. 208). Il est bordé de colonnes devenant de plus en plus petites et serrées vers la sortie. A l'entrée, il y a 5,8 m de haut et 3,5 m de large et à la sortie, 2,45 m de haut et 1 m de large.



Fig. 208

Habitué comme on l'est à voir des rangées parallèles de colonnes équidistantes, on imagine que c'est cela que l'on voit. La Fig. 209 est un plan sommaire des colonnades réelle et imaginaire.

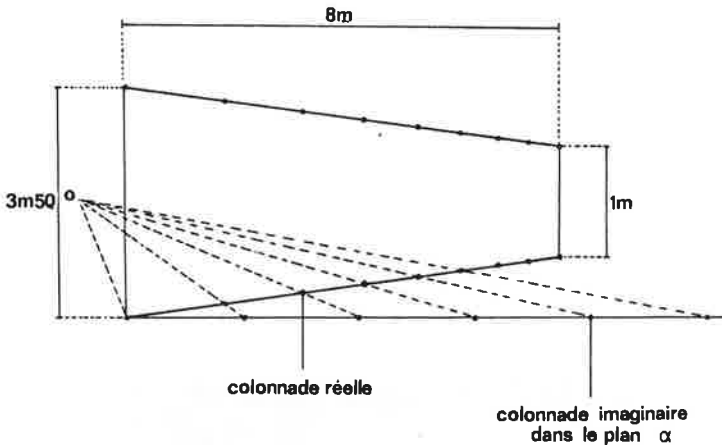


Fig. 209

Pour que le trompe-l'oeil soit réussi, il faut que les projections des colonnes sur le plan  $\alpha$  parallèle à l'axe de l'édifice donnent une division en parties égales.

Borromini s'est donc arrangé pour que, vues de l'entrée, les colonnes semblent former deux rangées parallèles qu'elles divisent en parties égales. Si on change de point de vue (par exemple, si on se place à la sortie), aura-t-on encore la même impression ? Ou bien ce trompe-l'oeil a-t-il été construit pour créer l'illusion uniquement quand on se place en un seul point bien déterminé ? Théoriquement, que doit-on avoir comme impression quand on se dirige vers le couloir (côté entrée) en restant dans son axe ?

Construction d'un trompe-l'oeil.

Les deux personnes de la Fig. 210 ont à peu près la même taille; quelle est la forme de la pièce où elles se trouvent ?



Fig. 210

Construisez une telle pièce miniaturisée et placez-y deux bonshommes en carton de la même grandeur. Fermez-la par une paroi antérieure percée d'un trou pour regarder et testez l'effet sur vos copains.

Les trompe-l'oeil d'un point de vue historique. Solution.

Le portique de la villa Spada à Rome n'est-il un trompe-l'oeil que si l'on se trouve en un point bien déterminé ?  
Notons o, le (ou un) point d'où l'on voit les deux rangées de colonnes comme si elles étaient longues et parallèles. Pour

que l'illusion n'ait pas lieu qu'en ce seul point  $o$ , il faudrait que la projection des colonnes sur le plan  $\alpha$ , à partir d'un autre point  $h$  donne aussi une division en parties égales (Fig. 211).

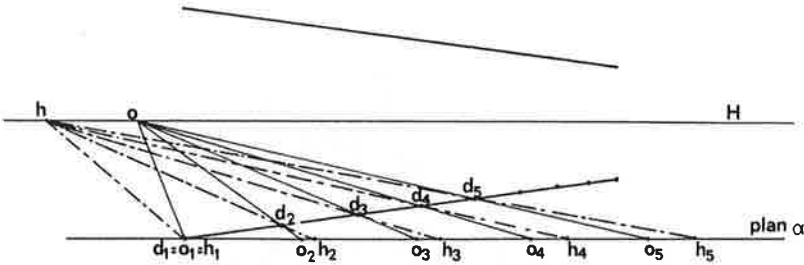


Fig. 211

De ce que nous avons vu au Chap. 3, nous allons dégager une propriété qui prouvera que ceci est vrai pour tous les points  $h$  appartenant à l'axe du portique.

Nous avons vu que pour diviser en parties égales une droite  $D$  horizontale fuyant vers un point  $f$  (Fig. 212), il suffit de choisir une droite  $A$  parallèle à la ligne d'horizon  $H$  et un point  $g$  (différent de  $f$ ) sur  $H$ , puis une suite de points  $g_1, g_2, \dots, g_n$  formant une division en parties égales sur  $A$ . Les droites  $gg_1, gg_2, \dots, gg_n$  coupent alors la droite  $D$  aux points  $d_1, d_2, \dots, d_n$  représentant une division en parties égales en perspective. Le choix de  $g$ , dans cette construction, étant arbitraire, nous pouvons énoncer la propriété de géométrie plane suivante.

Considérons, comme à la Fig. 212, deux droites parallèles  $H$  et  $A$ , une droite  $D$  qui leur est sécante, une suite de points  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sur  $D$  et un point  $g$  sur  $H$ . Si les points  $g_1, g_2, \dots, g_n$  obtenus en projetant les points  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sur  $A$ , à partir de  $g$ , forment une division en parties égales,



alors les points  $h_1, h_2, \dots, h_n$  obtenus en projetant les points  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sur A, à partir de tout autre point  $h$  de la droite H, forment également une division en parties égales.

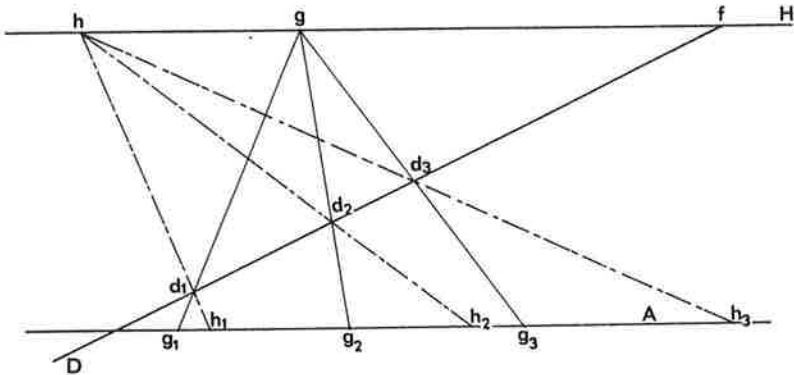


Fig. 212

Cette propriété peut s'appliquer à la Fig. 212. On prouve ainsi que, de tous les points de l'axe du couloir (devant l'entrée), on a l'illusion que les deux rangées de colonnes sont longues et parallèles. En outre, plus on est loin de l'entrée, plus le couloir paraît long. Si l'on se place à la sortie, les rangées de colonnes paraîtront aussi parallèles mais le couloir paraîtra moins profond (Fig. 213). Sur les Fig. 211 et 213 nous avons situé le plan  $\alpha$  à l'endroit qui nous semblait le plus naturel.

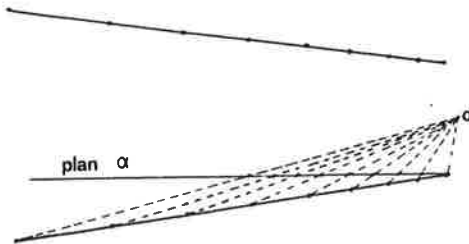


Fig. 213

Construction d'un trompe-l'oeil. Solution.

Les deux hommes de la Fig. 210 sont dans la pièce déformée d'Ames (peintre américain). Celle-ci n'a pas la forme d'un parallélépipède rectangle comme on pourrait le croire. Les angles de la pièce ne sont pas droits, le mur de gauche est beaucoup plus haut que celui de droite et le personnage de gauche est beaucoup plus éloigné que celui de droite; son image sur la photo est donc beaucoup plus petite. Il n'y a qu'en se plaçant en un point bien déterminé que l'on a l'impression d'être dans une pièce normale.

Pour construire une boîte qui ait le même effet, partons d'un parallélépipède rectangle  $abcdefgh$  de dimensions 25 cm X 25 cm X 40 cm (Fig. 214). Nous allons imaginer un polyèdre qui, du point  $o$ , centre de la face  $acge$ , donne la même image que le parallélépipède. Pour cela, nous allons modifier la face  $abcd$  et laisser la face  $efgh$  inchangée. Pour que la face  $a'b'c'd'$  du nouveau polyèdre soit vue du point  $o$ , comme la face  $abcd$ , les points  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  doivent être sur les rayons visuels respectifs  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$ ,  $od$ . Par facilité choisissons les points à mi-distance sur  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$  et  $od$ .

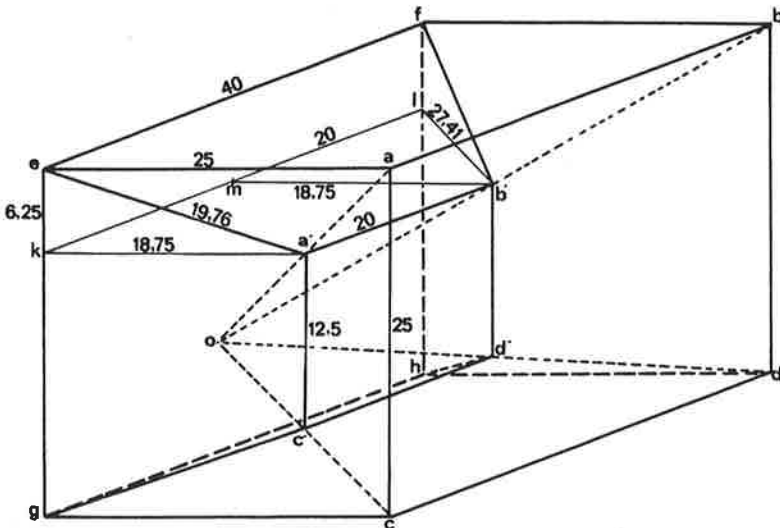


Fig. 214

La face  $a'b'c'd'$  sera donc un rectangle parallèle à  $abcd$  et de dimensions 12,5 cm X 20 cm. Calculons les dimensions des autres faces. La face avant est un trapèze de 18,75 cm de hauteur. Par le théorème de Pythagore (Appendice 1) appliqué au triangle  $eka'$ , nous trouvons la hauteur  $ea'$  de la face supérieure. De même, nous trouvons la hauteur  $lb'$  du trapèze arrière en appliquant le théorème de Pythagore du triangle  $mlb'$ . Il reste encore à découper ces faces dans du carton et à les assembler sans oublier de faire un trou au point  $o$ .

On peut intensifier l'illusion en traçant, du côté intérieur de la face  $fb'd'h$ , une figure qui, vue du point  $o$ , apparaîtra comme un carré. Nous allons tracer en nous basant sur le fait que  $fb'd'h$  est l'image en perspective du carré  $fbdh$  sur le plan  $fb'd'$ . Si nous divisons les arêtes  $b'd'$  et  $fh$  en trois parties égales (Fig. 215), elles représenteront  $bd$  et  $fh$  divisées en trois parties égales puisque ces arêtes sont parallèles au plan de projection  $fb'd'$ . Par contre, pour diviser  $hd'$  en trois parties représentant trois parties égales de  $hd$ , nous pouvons appliquer la méthode de la Fig. 71 puisque  $hd'$  représente une droite horizontale. Il nous reste ensuite à tracer le "carré" au milieu de la face.

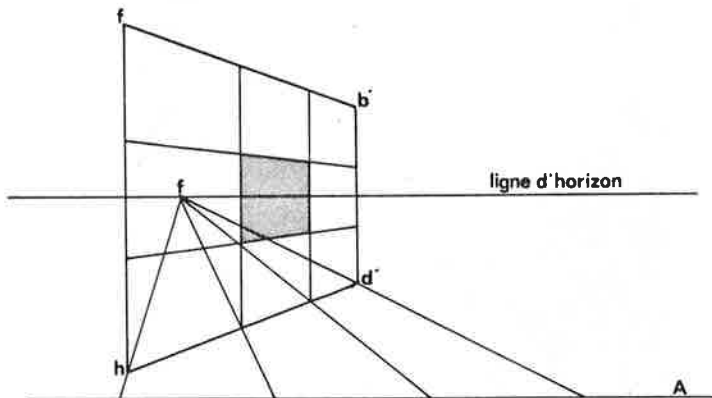


Fig. 215

### 3. LA PERSPECTIVE DANS LA PUBLICITE

La perspective est parfois utilisée dans des dessins ou photos publicitaires pour mettre en valeur le produit à vendre. La Fig. 141 est un exemple de perspective trompeuse. En voici deux autres (Fig. 216 et 217). Jetez-y un coup d'oeil critique. Et peut-être dorénavant regardez attentivement d'autres publicités conçues pour créer des illusions.



Fig. 216



*Ah!..... si vous aviez une*  
**Peugeot**

Fig. 217

## APPENDICES

### 1. LE THEOREME DE PYTHAGORE

#### Théorème.

Dans tout triangle  $abc$ , rectangle en  $a$ ,

$$|bc|^2 = |ab|^2 + |ac|^2.$$

### 2. LE SEGMENT CAPABLE DE $90^\circ$

#### Théorème.

Si  $b$  et  $c$  sont deux points diamétralement opposés d'un cercle et si  $a$  est un autre point de ce cercle, alors le triangle  $abc$  est rectangle en  $a$  (Fig. 218).

D'autre part, si un triangle  $abc$  est rectangle en  $a$ , alors  $a$  se trouve sur un demi-cercle dont les extrémités sont  $b$  et  $c$  (Fig. 218).

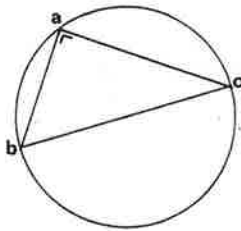


Fig. 218

3. LE THEOREME DE THALES

Théorème.

Si un faisceau de droites parallèles coupe deux droites sécantes données, les couples de segments ainsi déterminés sur les deux droites sont dans un même rapport. Dans le cas de la Fig. 219, on a

$$\frac{|ab|}{|a'b'|} = \frac{|cd|}{|c'd'|} .$$

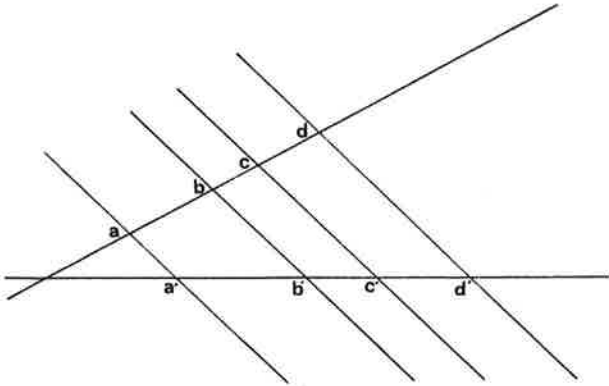


Fig. 219

La propriété suivante, relative aux triangles semblables, est souvent appelée théorème de Thalès également.

Si, comme à la Fig. 220, deux droites parallèles coupent deux droites sécantes, les points d'intersection a, b, c, b', c' ainsi déterminés sont tels que

$$\frac{|ab|}{|ac|} = \frac{|ab'|}{|ac'|} = \frac{|bb'|}{|cc'|}$$

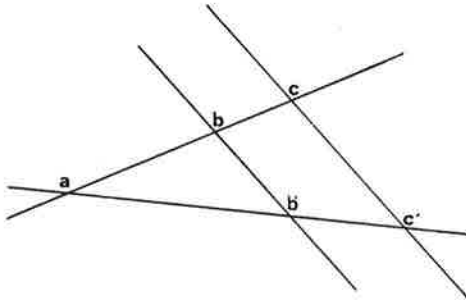


Fig. 220

#### 4. HOMOTHETIES ET TRIANGLES SEMBLABLES

##### Définition de l'homothétie.

L'*homothétie de rapport r et de centre o* est une transformation du plan qui applique le point o sur lui-même et tout autre point p sur le point p' de la droite op (Fig. 221) tel que si celle-ci est graduée avec son zéro en o, alors

$$(l'abscisse \text{ de } p') = r.(l'abscisse \text{ de } p).$$

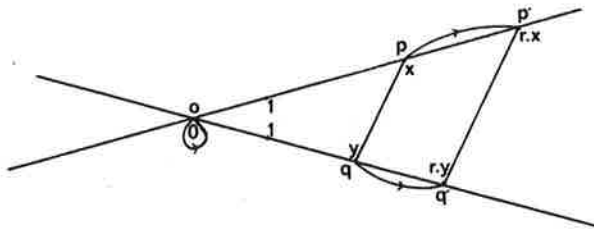


Fig. 221

Deux figures sont *homothétiques* s'il existe une homothétie qui applique l'une sur l'autre.



Propriétés des homothéties.

1. Toute homothétie transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.
2. Toute homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport.

Définition des suites homothétiques.

Une suite de figures  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  est *homothétique* s'il existe une homothétie qui applique  $A_1$  sur  $A_2$ ,  $A_2$  sur  $A_3$ ,  $A_3$  sur  $A_4$ , etc. (Fig. 222).

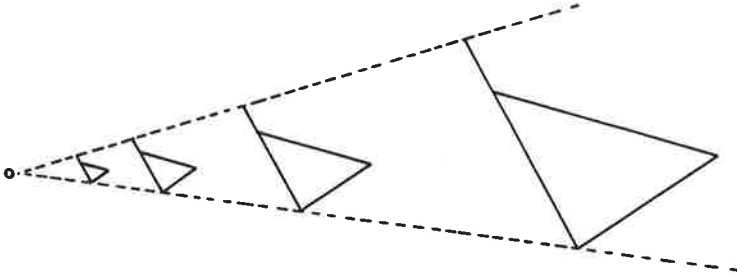


Fig. 222

Triangles homothétiques.

Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux parallèles, alors l'un est l'image de l'autre par une translation ou une homothétie et les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles (Fig. 223). Autrement dit, si  $abc$  et  $a'b'c'$  sont deux triangles tels que  $ab \parallel a'b'$ ,  $ac \parallel a'c'$  et  $bc \parallel b'c'$ ,

$$\frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|a'c'|}{|ac|} = \frac{|b'c'|}{|bc|} .$$

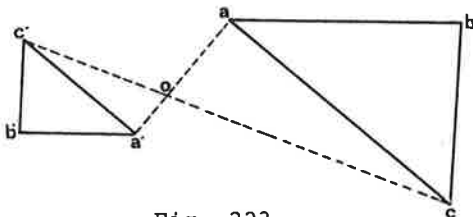


Fig. 223

### 5. SUITES GEOMETRIQUES

#### Définition des suites géométriques.

Une suite  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  de nombres réels non nuls est dite *géométrique* si le quotient de deux termes successifs est constant c'est-à-dire

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots$$

Ce quotient est appelé la *raison* de la suite.

#### Propriété des suites géométriques.

Si la raison d'une suite géométrique est plus grande que 1, la suite tend vers l'infini. Exemple : 1, 2, 4, 6, 8, 16, etc. Si la raison est plus petite que 1, la suite tend vers zéro.

Exemple :  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ , etc.

#### Lien entre suite homothétique et suite géométrique.

1. Soit  $o, p_0, p_1, p_2, \dots$  une suite de points de la demi-droite  $[op_0$ . La suite  $p_0, p_1, p_2, \dots$  est homothétique et l'homothétie est de centre  $o$  ssi la suite des longueurs  $|op_0|, |op_1|, |op_2|, \dots$  est géométrique. En effet, dans les deux cas,  $|op_1| = r \cdot |op_0|, |op_2| = r \cdot |op_1|, \dots$

2. Soit  $o, p_0, p_1, p_2, \dots$  une suite infinie de points de la demi-droite  $[op_0$ . Si la suite des longueurs  $|op_0|, |op_1|, |op_2|, \dots$  est géométrique, alors la figure composée des points  $p_0, p_1, p_2, \dots$  est homothétique à toute figure composée des points  $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$  où  $n$  est un naturel.

En effet, l'homothétie de centre  $o$  et de rapport  $\frac{|op_0|}{|op_n|}$  applique  $p_n$  sur  $p_0, p_{n+1}$  sur  $p_1, p_{n+2}$  sur  $p_2$  etc. puisque

$$\frac{|op_0|}{|op_n|} = \frac{|op_0|}{|op_1|} \cdot \frac{|op_1|}{|op_2|} \cdot \frac{|op_2|}{|op_3|} \cdot \dots \cdot \frac{|op_{n-1}|}{|op_n|},$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|op_1|}{|op_2|} \cdot \frac{|op_2|}{|op_3|} \cdot \frac{|op_3|}{|op_4|} \cdot \dots \cdot \frac{|op_n|}{|op_{n+1}|} = \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{|op_1|}{|op_{n+1}|}, \\
 &= \frac{|op_2|}{|op_3|} \cdot \frac{|op_3|}{|op_4|} \cdot \frac{|op_4|}{|op_5|} \cdot \dots \cdot \frac{|op_{n+1}|}{|op_{n+2}|} = \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{|op_2|}{|op_{n+2}|}, \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

## 6. PROJECTIONS PARALLELES

### Définition de la projection parallèle.

Soient un plan  $\pi$  et une droite  $A$  non parallèle à  $\pi$ . La *projection parallèle de direction  $A$  sur le plan  $\pi$*  est l'application envoyant chaque point  $a$  de l'espace sur le point d'intersection du plan  $\pi$  et de la droite parallèle à  $A$  et passant par  $a$  (Fig. 224).

On peut considérer la projection parallèle de direction  $A$  comme une projection centrale dont le centre est à l'infini sur la droite  $A$ .

Comme pour la projection centrale, on utilise le terme de *perspective parallèle* au lieu de projection quand celle-ci est utilisée pour la représentation.

La *projection orthogonale* est une projection parallèle dont la droite de direction est perpendiculaire au plan de projection.

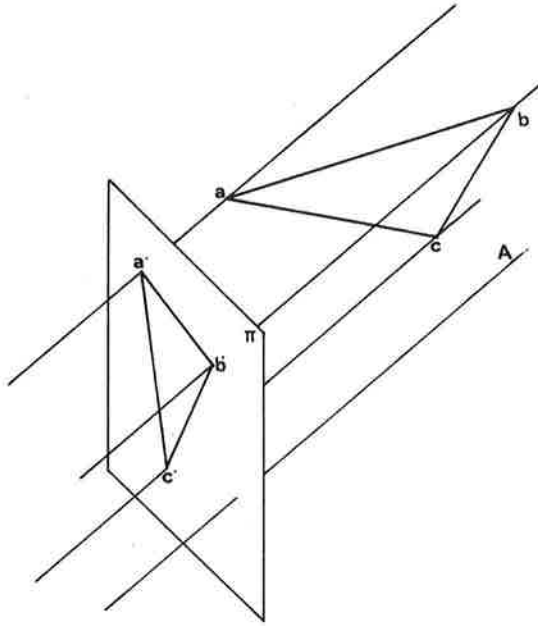


Fig. 224

Propriétés des projections parallèles.

1. L'image d'une droite parallèle au plan de projection est une droite qui lui est parallèle.

En effet; une telle droite E et son image E' ne sont, en tous cas, pas sécantes puisque E' est dans un plan parallèle à E. De plus, E et E' sont, toutes deux, dans le plan contenant les droites parallèles à la droite A (direction de la projection) et rencontrant E; ce plan est le plan projetant de E (Fig. 225).

2. Les projections parallèles conservent le parallélisme quand elles conservent les droites.

En effet, pour trouver les images de deux droites parallèles E et F, il faut considérer les deux plans projetant les comprenant. Ces deux plans étant parallèles (Fig. 226), leurs intersections avec le plan  $\pi$  le sont également.

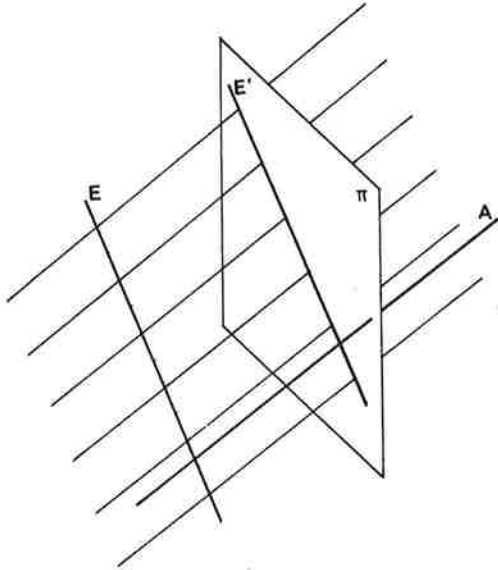


Fig. 225

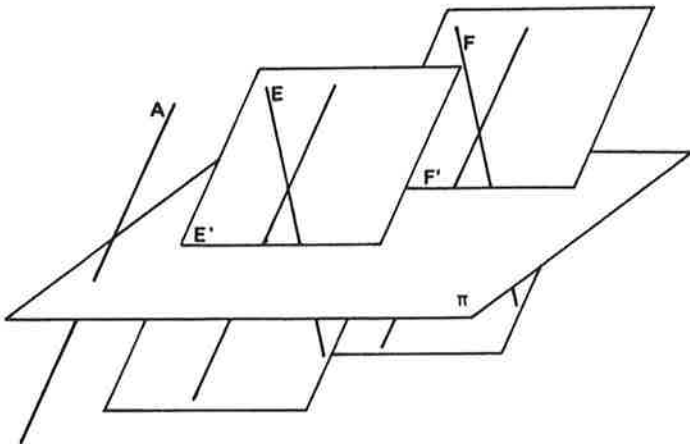


Fig. 226

3. Les projections parallèles conservent le rapport des distances sur une droite non parallèle à la droite de direction. Dans le cas de la Fig. 227, on a

$$\frac{|ab|}{|cd|} = \frac{|a'b'|}{|c'd'|}$$

Cette propriété découle directement du théorème de Thalès considéré dans le plan projetant.

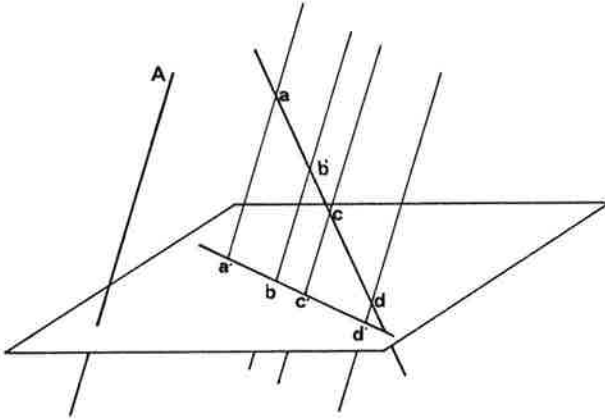


Fig. 227

## BIBLIOGRAPHIE

Si vous voulez en savoir plus

- sur l'histoire de la perspective, consultez, par exemple, (5), (10), (11), (16), (17), (22), (28), (33);
- sur les différents modes de représentation, (9), (21);
- sur la technique du dessin en perspective, (3), (4), (14);
- sur les traités de perspective, (7), (31);
- sur les trompe-l'oeil et anamorphoses, (2), (22), (27);
- et sur la psychologie de la forme, (15), (19), (20), (25).

(1) A. BARRE, A. FLOCON, *La perspective curviligne (de l'espace visuel à l'image construite)*, Flammarion, Paris, 1968.

(2) J. BALTRUSAITIS, *Anamorphoses ou magie artificielle des effets merveilleux*, Olivier Perrin, Paris, 1969.

(3) B. BONBON, *Perspective moderne*, Eyrolles, Paris, 1983.

(4) B. BONBON, *Perspective scientifique et artistique*, Eyrolles, Paris, 1983.

(5) M. DALAI EMILIANI, *Perspective*, Encyclopaedia Universalis, Paris, 1980.

(6) M. DELETRAIN, B. GOFFART, *Les spirales, de vieilles figures pour un enseignement vivant de la géométrie*, mémoire de licence, Université-Catholique de Louvain, 1986.

(7) P. DESCARGUES, *Traité de perspective*, Ed. du Chêne, Paris, 1976.

(8) R. DESCARTES, *Oeuvres et lettres*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1966.

- (9) F. DUBERY, J. WILLATS, *Perspective and other drawing systems*, The Herbert Press, London, 1983.
- (10) A. FLOCON, R. TATON, *La perspective*, Coll. Que sais-je n° 1050, P.U.F., Paris, 1963.
- (11) C. GARRAUD, *Représentation de l'espace (II) : la perspective linéaire : approche historique*, Coll. Diathèque Art, Centre National de Documentation Pédagogique, Paris, 1978.
- (12) E.H. GOMBRICH, *L'art et l'illusion*, trad. franç., Gallimard, Paris, 1971.
- (13) F. GOMES de TEIXEIDRA, *Traité de courbes spéciales remarquables planes et gauches*, trad. revue et très augmentée, Tome 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1971.
- (14) P. GUADET, *Cours de perspective*, Vincent, Fréal et Cie, Successeurs, Paris, 1929.
- (15) P. GUILLAUME, *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris, 1979.
- (16) I.R.E.M. de Basse-Normandie, *Cahiers de la perspective n° 1, points de vue*, Caen, 1981.
- (17) I.R.E.M. de Basse-Normandie, *Cahiers de la perspective n° 2, points de vue*, Caen, 1982.
- (18) I.R.E.M. de Lille, *Actes du colloque inter-IREM de géométrie de Saint-Amand (mai 1986)*, à paraître en 1987.
- (19) R. KLEIN, *La forme et l'intelligible*, Gallimard, Paris, 1970.
- (20) W. KOEHLER, *Psychologie de la forme*, Gallimard, Paris, 1964.
- (21) D. LAGOUTTE, *Représentation de l'espace (I) : Les différents types de projection en peinture*, Coll. Diathèque Art, Centre National de Documentation Pédagogique, Paris, 1978.
- (22) R. LAURENT, *La perspective*, notes photocopiées.
- (23) A. LEJEUNE, *Euclide et Ptolémée, deux stades de l'optique géométrique grecque*, Université de Louvain, 1948.
- (24) J. LUBCZANSKI, *Comment réussir le triangle quelconque ... et douze autres friandises !*, Cédic/Nathan, Paris, 1986.
- (25) M. MERLEAU-PONTY, *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris, 1945.



(26) J.F. NICERON, M. MERSENNE, *La perspective curieuse avec l'optique et la catoptrique*, Jean du Puis, Paris, 1663.

(27) M.L. d'OTRANGE MASTAI, *Illusion in Art (Trompe-l'Oeil, a History of Pictorial Illusionism)*, Abaris Books, New York, 1975.

(28) E. PANOFSKY, *La perspective comme forme symbolique*, trad. franç., Coll. Le sens commun, Ed. de Minuit, Paris, 1975.

(29) D. PEDOE *Geometry and the liberal arts*, Penguin books, Middlesex, 1976.

(30) G.M. PILO, *Canaletto*, trad. franç., Coll. Marabout Université, Gérard et Cie, Verviers, 1961.

(31) M. POUDDRA, *Histoire de la perspective ancienne et moderne*, J. Corréard, Paris, 1864.

(32) Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, *Math-Jeune n° 29*, automne 1985.

(33) P. THUILLIER, *Espace et perspective au Quattrocento*, *La Recherche* 15 (1984), pp.1384-1398.

(34) G. TORALDO DI FRANCIA, *The investigation of the physical world*, Cambridge University Press, 1981.

(35) P. VER EECKE, *Euclide, l'optique et la catoptrique*, Desclée de Brouwer et Cie, Bruges, 1938.

(36) VOLTAIRE, *Oeuvres complètes*, tome trente et unième, Imprimerie de la Société littéraire-typographique, 1784.

## INDEX

- Alberti 10, 69 et ss  
Ames (la pièce déformée d') 170 et ss  
anamorphose 160 et ss  
angle de champ 105, 110 et ss  
asymptote 115 et ss
- Baltrušaitis 162  
Borromini 165  
Bosse 141  
Bonbon 129
- Canaletto 30 et ss  
coordonnées 116 et ss  
coordonnées cylindriques 117 et ss
- Dalai Emiliani 10, 155  
Deletrain 121, 127  
de Lyre 1  
Descargues 127 et ss  
Descartes 144  
de Vinci 10, 107, 149, 155  
d'Otrange Mastai 163  
Dubery 107, 155, 157 et ss  
Dürer 9 et ss, 179
- équation cartésienne 116 et ss  
équation paramétrique 115 et ss  
équation polaire 118 et ss
- Euclide 136 et ss  
Fouquet 159  
Giotto 29 et ss  
Goffart 121, 127  
Gombrich 153  
Gomes de Teixeira 121  
grandeur apparente 136 et ss  
Guillaume 153
- hélice conique 127  
hélice cylindrique 117 et ss
- illusion d'optique 143, 160 et ss
- Klein 153  
Koehler 153  
Laurent 161  
Lejeune 136  
Lenker 131  
ligne de fuite 34  
ligne de terre 131  
ligne d'horizon 35  
limites 115 et ss  
Lorenzetti 29 et ss, 62 et ss

- Merleau-Ponty 144, 153  
Michel-Ange 143  
Mersenne 162
- Nicéron 162
- Octaèdre 129 et ss
- Palladio 163  
Panofsky 10, 31, 69, 149  
Pedoe 144  
Pélerin 69 et ss  
perception 138 et ss  
perspective centrale 12  
perspective curviligne 154 et ss  
perspective cylindrique 156 et ss  
perspectographe 131 et ss  
photographie 110 et ss  
point de fuite 23  
point à l'infini 41 et ss  
point principal 23  
point de vue 10  
polyèdre 129  
projection centrale 12, 38 et ss  
projection cylindrique 154, 156 et ss  
projection parallèle 7, 49, 132, 179 et ss  
projection sphérique 154  
Ptolémée 136 et ss  
publicité 172
- Rodler 127
- Saint-Gilles 103 et ss  
Scamozzi 163  
sinusoïde 115 et ss
- Société Belge des Professeurs de Mathématique 101  
Soufflet 61  
spirale 121 et ss  
spirale d'Archimède 121  
spirale hyperbolique 122 et ss  
spirale logarithmique 121  
suite géométrique 59, 69 et ss, 78 et ss  
suite homographique 62  
suite homothétique 78 et ss, 177 et ss
- tangente 124 et ss  
Thuillier 137 et ss  
Toraldo di Francia 144  
trampe-l'oeil 143, 160 et ss
- Van Gogh 158 et ss  
Vermeer 103 et ss, 157  
Viator 69 et ss  
vision 135 et ss  
Ver Eecke 136  
Voltaire 144  
Vredeman de Vries 129
- Willats 107, 155, 157 et ss  
Zyndt 131

## SOURCES DES ILLUSTRATIONS

Fig. 1 : (11)

Fig. 2 : R. BASCHET, *La peinture européenne, ses écoles complémentaires*, Ed. de l'illustration, Baschet et Cie, Paris, 1957.

Fig. 14 : (21)

Fig. 42 : G. PREVITALI, *Gli affreschi di Giotto ad Assisi*, Fratelli Fabbri, Milan, 1965.

Fig. 43 : E. CARLI, *La peinture siennoise*, Scala, Firenze, 1982.

Fig. 44 : *Canaletto (46)*, Coll. Chefs-d'oeuvre de l'art, Grands peintres, Hachette, Paris, 1967.

Fig. 46 : *Guide Bleu Italie du Nord et du Centre*, (c) Hachette Guides Bleus 1983, (c) T.C.I.

Fig. 89 : (28)

Fig. 90 : Carte postale (c) Stephan Hender, Catch Productions PC 1702.

p. 80 : Carte postale (c) Guus Rijven 1985, Catch Productions PC 1903.

Fig. 134 : C. JACQUES, *La peinture française, les peintres du moyen-âge*, Pierre Tisné, Paris, 1941.

Fig. 135 et 200 : (9)

Fig. 140 et 141 : adaptées de Bunaco, s.p.r.l., Bruxelles.

Fig. 144 : HISLAIRE, *Bidouille et Violette n°4*, La ville de tous les jours, Dupuis, Marcinelle, 1986.

Fig. 151 et 210 : J. HEDGECOE, *Le livre de la photographie*, trad. franç., Larousse/Montel, Paris, 1976.

Fig. 162, 164, 168, 179 et la photo de couverture : (7)

Fig. 172, 173, 186, 191 et 199 : adaptées de (9)

Fig. 180 et 204 : (2)

Fig. 195 et 201 : (1)

Fig. 198 : (21)

Fig. 205 et 207 : H. LECLERC, *Les origines italiennes de l'architecture théâtrale moderne*, Librairie E. Droz, Paris, 1946.

Fig. 208 : (27)

Fig. 217 : J. DELHAYE, *Affiches et gravures, Art Déco*, trad. franç., Flammarion, Paris, 1977.

Le présent ouvrage a été achevé d'imprimer  
sur les presses de l'imprimerie Ciaco  
en juin 1987  
(Louvain-la-Neuve — Belgique)

### Dossiers du GEM

- n° 1 : *Une expérience d'enseignement mathématique à l'école professionnelle*; 22 pages, 1979, 40 FB.  
n° 2 : *Une géométrie pour tous les jours*; 104 pages, 2e éd., 1981, 130 FB.  
n° 3 : *L'archipel des isométries, Essai de redécouverte*; 270 pages, 1982, 480 FB.

### Propositions du GEM

- n° 1 : *Le Groupe d'Enseignement Mathématique*; 13 pages, 1981, 30 FB.  
n° 2 : *Rencontres avec l'infini*; 44 pages, 1981, 100 FB.  
n° 3 : *L'outil vectoriel*; 21 pages, 1981, 60 FB.  
n° 4 : *Les fonctions, c'est aussi autre chose ...*; 44 pages, 1981, 100 FB.  
n° 5 : *Fouetter un chat avec une droite*; 24 pages, 1981, 75 FB.  
n° 6 : *Une isométrie de l'espace vue à basse, moyenne et haute altitude*; 25 pages, 1982, 80 FB.  
n° 7 : *Activités géométriques pour les écoles professionnelles ... et les autres*; 59 pages, 1982, 150 FB.  
n° 8 : *Ecrire des maths*; 30 pages, 1983, 100 FB.  
n° 9 : *Des élèves responsables ... c'est possible*; 10 pages, 1984, 30 FB.  
n° 10 : *Mesures, pavages et nombres irrationnels*; 52 pages, 1985, 100 FB.  
n° 11 : *Gros plan sur les graphiques*; 27 pages, 1985, 100 FB.

### Autres documents

M. PELTIER, N. ROUCHE, M. MANDERICK, *Contremanuel de statistique et probabilité*; 196 pages, 1982, 530 FB.  
*La géométrie sur le terrain des élèves. Actes du Colloque inter-IREM de géométrie à Louvain-la-Neuve, mai 1983*; 163 pages, 1984, 250 FB.  
*Analyse mathématique, Réflexions et problèmes préparatoires aux études supérieures*; 1987, 159 pages, 295 FB. (Coédition De Boeck).

### Diffusion

Pour recevoir les publications du GEM, adressez vos commandes par lettre au Groupe d'Enseignement Mathématique, 2 chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgique). Elles vous seront expédiées accompagnées d'une facture et d'instructions pour le paiement. Chaque facture sera majorée de 30 FB + 10 FB par brochure supplémentaire pour la Belgique et de 40 FB + 10 FB par brochure supplémentaire pour l'étranger (frais de port et d'expédition).

Mai 1987

450 FB.

© 1987, by CIACO s.c.

Tous droits de traduction, de reproduction, d'adaptation même partielle, y compris les microfilms, réservés pour tous pays.

ISBN: 2-87085-114-6

Dépôt légal: D/1987/2010/14

## La perspective en questions

Peindre ou dessiner des objets de l'espace de sorte qu'ils aient la même apparence que dans la réalité, est-ce possible? Existe-t-il des représentations tout-à-fait fidèles? Comment s'y prendre pour imiter la réalité au plus près? Vieilles questions qui ont préoccupé les peintres et les mathématiciens depuis bien des siècles et jusqu'à nos jours. Ce livre conduit le lecteur, à travers une suite de questions, à reconstruire pour lui-même et à comprendre en profondeur la perspective. Les réponses aux questions sont données en détail, mais il est essentiel, pour un apprentissage sérieux, que le lecteur s'efforce de répondre aux problèmes posés, avant de consulter les solutions.

Aucune connaissance préalable n'est nécessaire pour cela mais on apprend au passage des notions de géométrie de l'espace.

Les chapitres traités sont variés: ils vont de la lecture de peintures anciennes au dessin en perspective de spirales comme celles d'un escalier en colimaçon, en passant par les trompe-l'œil, les pièges de la vision, les dessins de rangées d'arbres, de carrelages, d'ombres portées par le soleil ou des lampes, etc.

Ces questions diverses sont une belle source de problèmes pour les professeurs qui veulent enseigner la géométrie de l'espace en proposant à leurs élèves des situations où les points, les droites et les plans servent à d'autres choses plus excitantes qu'à démontrer des théorèmes sur les points, les droites et les plans. En plus, ces élèves acquerront un véritable savoir, un coup d'œil utile en architecture et en peinture, et une intuition de l'espace essentielle en mathématique.

## Le Groupe d'Enseignement Mathématique,

fondé en 1978, rassemble une trentaine de régents, licenciés, enseignants universitaires et étudiants. Il considère comme sa tâche principale la préparation en groupes d'enseignements de mathématiques dans le secondaire. Mais cette activité principale engendre en outre des recherches dans le domaine de l'éducation mathématique, de multiples actions de formation continue et des publications de dossiers variés: textes mathématiques, relatifs d'expériences et réflexions sur l'enseignement.