

Quelques instruments de pensée en géométrie¹

Thérèse Gilbert, Université Catholique de Louvain, Belgique

Au départ, une question d'un instituteur: «Quelles connaissances géométriques les enfants doivent-ils absolument avoir acquises en quittant l'école primaire ?» Répondre en termes de concepts (le parallélogramme, le losange, ... la perpendicularité, le parallélisme, ... les symétries orthogonales, les rotations, ...) ne nous semble pas suffisant, tant la façon dont ils auront découvert ces concepts, les relations qu'ils verront entre eux et les images mentales que ces concepts évoqueront en eux influencent la façon dont ils pourront les utiliser en temps utile. L'enseignement actuel de la géométrie en primaire se réduit parfois à des leçons de vocabulaire et de définitions («le losange est un quadrilatère aux côtés de même longueur»), à des études de propriétés («ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu») et à des classements («d'un côté les polygones, de l'autre les autres figures planes»). Peu de problèmes y sont résolus et les concepts, dont les enfants ont donc peu l'occasion de se servir, sont abordés indépendamment les uns des autres.

1. [ndlr] Cet exposé a été présenté à Lausanne, le 6 mars, au Centre de Perfectionnement et de Formation du Canton de Vaud, dans le cadre d'une formation de deux jours sur la géométrie et le visuel au service de nombres en primaire (3P-4P). Les lecteurs qui auraient suivi l'exposé seront heureux d'en retrouver le texte dans *Math-Ecole*. Nous remercions Thérèse Gilbert d'en faire profiter l'ensemble de nos lecteurs.

Ce texte sera aussi publié dans les actes d'une journée académique sur la géométrie à l'école primaire, organisée le 26 avril 2000 par l'IREM de Lille, le CRDP du Nord-Pas de Calais et l'APMEP Régionale de Lille.

Autre question que l'on se pose naturellement lorsque l'on réfléchit à l'enseignement de la géométrie en primaire: «Selon quels critères peut-on déterminer l'intérêt de telle ou telle séquence d'enseignement en géométrie ?» Il est parfois difficile de justifier les choix d'activités que l'on fait. Même quand on est persuadé que celles-ci sont éducatives, les raisons de cette impression restent parfois obscures.

Pour tenter de répondre à ces deux questions, nous nous sommes interrogé sur la façon dont on résout des problèmes géométriques. Cela nous a amené à déterminer des *instruments de la pensée géométrique*, c'est-à-dire les outils mentaux élémentaires qui sont utilisés le plus souvent lorsque l'on résout un problème géométrique. Ces outils sont nombreux et peuvent être décrits de diverses façons. Nous les présentons ci-dessous en cinq groupes. Ceux-ci ont des liens évidents entre eux et pourraient être classés selon d'autres critères.

Nous commençons par présenter deux problèmes géométriques simples – que le lecteur est invité à résoudre avant d'en lire les solutions – qui nous donneront l'occasion de mettre en évidence certains de ces outils ou instruments de pensée. Ceux-ci seront ensuite développés et complétés par d'autres, qui seront illustrés à l'aide de brefs exemples.

Tous les problèmes décrits ci-après appartiennent au domaine géométrique. Les instruments de pensée mis en évidence ne sont pas pour autant tous propres à une activité spécifiquement géométrique. Certains sont utiles plus généralement à la résolution de problèmes mathématiques ou autres. Néanmoins nous développerons prioritairement ceux qui nous paraissent les plus spécifiques à la géométrie ainsi que ceux qui nous semblent les plus négligés dans cette branche des mathématiques.

En outre s'il est vrai que les exemples illustrant la façon de développer les instruments

de pensée exhibés concernent l'enseignement primaire, les deux problèmes qui suivent, eux, sont du niveau de l'enseignement secondaire. Il nous a en effet semblé utile,

pour enrichir notre réflexion sur la géométrie en primaire, d'examiner la pensée mathématique en recherche en dépassant le cadre de l'enseignement primaire.

Deux problèmes

Situation 1. On donne un segment AB (figure 1). On demande de trouver tous les points C tels que le triangle ABC soit isocèle.

Situation 2. On donne un segment AB (figure 1). On demande de trouver tous les points C tels que le triangle ABC soit rectangle.

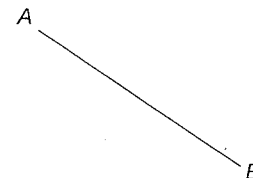


figure 1

Développons les solutions de ces deux problèmes en détaillant un cheminement qui permet d'arriver à les résoudre. La colonne de droite ci-après reprend les principaux instruments de pensée utilisés.

Dans la situation 1, on pense d'abord aux points de la médiatrice de AB , surtout si l'on redresse le segment (fût-ce mentalement) pour le voir horizontalement: dans ce cas, on imagine facilement un triangle isocèle «posé sur sa base» (le troisième côté, celui qui, éventuellement, n'est pas de même longueur que les deux autres), c'est-à-dire dans la position habituelle; puis on augmente ou on diminue continûment la hauteur de ce triangle en déplaçant C sur la demi-médiatrice (celle au-dessus de AB). Le mouvement permet d'atteindre en pensée les triangles isocèles inaccessibles pratiquement (car trop hauts) ou indiscernables du segment (car trop plats). On prolonge naturellement cette demi-droite vers le bas et on évoque les triangles isocèles «posés sur leur pointe», dans une position symétrique à ceux qui sont sur leur base. C'est la symétrie de la situation qui permet de se persuader que la médiatrice de AB est le lieu des points équidistants de A et B .

Mais il existe d'autres endroits possibles pour le point C : si cette fois on choisit de considérer AC comme base du triangle isocèle, on trouve un point C possible en traçant un côté BC de même longueur que AB . En répétant l'opération, on se rend compte que C est sur un cercle centré en B . Et c'est forcé, puisque BC est toujours de même longueur que AC . Pour obtenir tous les points C (et il y en a une infinité !) tels que $BC=AB$, il suffit donc de tracer le cercle centré en B passant

Redresser une figure pour l'amener dans une position privilégiée, où les intuitions émergent plus facilement.

Prolonger en pensée un mouvement pour atteindre des cas inaccessibles.

Évoquer la symétrie pour se ramener à une situation connue.

L'argument de symétrie est évoqué comme raison suffisante.

par A . Le cercle apparaît donc comme ensemble de points, alors que l'idée première du cercle est celle d'une courbe; c'est le mouvement continu du segment BC autour de B qui permet de percevoir l'ensemble des points comme une courbe.

Par raison de symétrie, le cercle centré en A et passant par B forme également un ensemble d'endroits possibles pour C .

De ces trois courbes, la médiatrice et les deux cercles (figure 2) il faut bien sûr enlever les points d'intersection avec la droite AB pour que les points A , B et C ne soient pas alignés.

Dans la situation 2, on pense d'abord aux perpendiculaires à AB passant par A ou B . On peut faire le même genre de remarques que pour la situation 1 à propos du mouvement et de la symétrie qui peuvent être évoqués pour cette partie de solution.

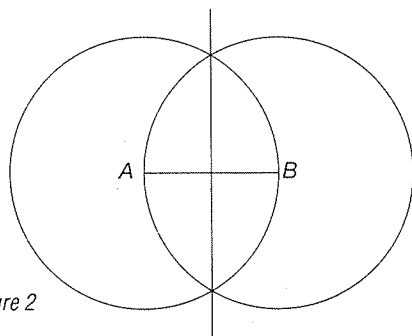


figure 2

Pour compléter cette solution, il faut penser aux triangles qui sont rectangles en C . Quelques essais expérimentaux nous permettent de voir se dessiner une courbe ressemblant un peu à un cercle centré au milieu de AB . Mais est-ce bien un cercle ? Pour le voir, on peut commencer par repartir du segment AB incliné. Deux des endroits possibles pour le point C se trouvent naturellement en traçant des droites verticales et horizontales par les points A et B (figure 3): c'est bien comme cela que l'on représente le plus fréquemment les triangles rectangles.

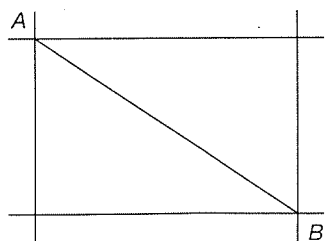


figure 3

On voit alors apparaître un rectangle en position privilégiée. En inclinant autrement le segment AB , on trouverait un autre rectangle, formé de deux triangles rectangles. Finalement, au lieu de chercher le lieu du

Parcourir une infinité de points d'un simple mouvement. Le mouvement engendre des figures.

Evoquer la symétrie pour se ramener à une situation connue.

troisième sommet des triangles rectangles dont AB est l'hypoténuse, autant chercher le lieu des troisième et quatrième sommets C et D des rectangles dont AB est une diagonale. Ces points C et D sont les extrémités de la deuxième diagonale des rectangles cherchés, diagonale qui doit forcément être de même longueur que AB . Comme de plus les deux diagonales doivent se couper en leur milieu, il suffit pour trouver tous les points C et D de faire tourner AB autour de son milieu en gardant la trace que laissent ses extrémités. Cette trace est un cercle.

Une autre façon de se convaincre qu'on est bien en présence d'un cercle consiste à se souvenir que tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle et, réciproquement, que tout triangle rectangle est inscrit dans le demi-cercle dont le diamètre est l'hypoténuse du triangle. Comment prouve-t-on habituellement cette proposition ?

Donnons-nous un diamètre AB d'un cercle et un point C sur ce cercle, et montrons que le triangle ABC est rectangle en C . Notons pour cela O le centre du cercle. Traçons le rayon OC et le triangle ABC . Cela fait apparaître deux triangles isocèles (même s'ils ne sont pas sur leur base) AOC et BOC . Puisqu'ils sont isocèles, les deux angles à la base de chacun d'eux sont égaux (figure 4). L'angle en C vaut donc la moitié de la somme des angles du triangle ABC . Or cette somme, comme dans tout triangle, vaut 180° . Donc l'angle en C vaut 90° .

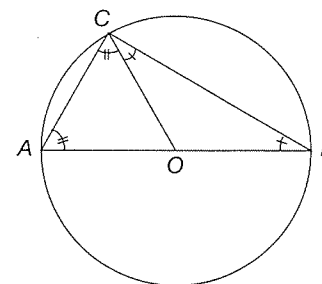


figure 4

Inversement, il faut montrer que si ABC est rectangle en C , le point C est sur le cercle de diamètre AB , ou encore que si C n'est pas sur le cercle, alors le triangle ABC ne peut pas être rectangle en C , ce qui est équivalent. Soit donc un triangle ABC tel que C n'est pas sur le cercle de diamètre AB (figure 5). Dans le cas où l'angle CAB n'est pas droit, appelons D le deuxième point d'intersection de la droite AC et du cercle. Comme nous l'avons montré auparavant, l'angle ADB est droit. L'angle ACB , lui, ne peut donc pas être droit, puisque par un point (ici B) extérieur à une droite (ici AC), il ne passe qu'une perpendiculaire à cette droite (ici BD). Dans le cas où AC est tangent au cercle, l'angle CAB est droit et donc l'angle ACB ne peut pas l'être.

Changer l'énoncé du problème.

Ajouter quelque chose à une figure: ici, se représenter le rectangle à l'aide de ses diagonales.

Aller chercher la bonne propriété. Parcourir une infinité de points d'un simple mouvement.

Isoler par la pensée ce qui importe pour résoudre le problème: ici, les extrémités des diagonales qui tournent.

Le cercle enrichi de rayons et de cordes fait apparaître des triangles isocèles: les rayons et les cordes cessent d'être des attributs du cercle (qui, lui, s'évanouit) pour devenir des côtés de triangles.

Le fait de voir une figure familière, ici un triangle isocèle, rend disponible une série de propriétés. Aller chercher les connaissances utiles.

Prouver la contraposée.

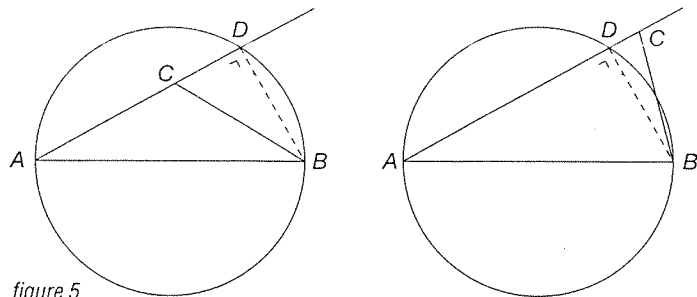


figure 5

La solution du problème de la situation 2 est finalement constituée de trois courbes : deux droites et un cercle, dont il faut enlever les points A et B (figure 6).

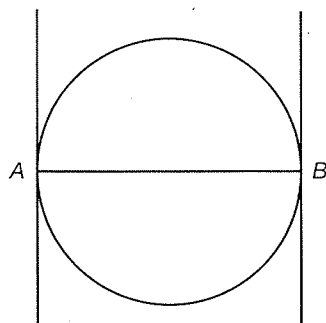


figure 6

En regardant les solutions des deux problèmes (figures 2 et 6), on s'aperçoit qu'elles se ressemblent : dans l'une, il y a deux cercles et une droite, et dans l'autre, un cercle et deux droites. Peut-on expliquer cette ressemblance à partir des énoncés ?

Quel rapport y a-t-il entre un triangle isocèle et un triangle rectangle ? Réponse : dans un triangle isocèle, il y a deux triangles rectangles isométriques. Au lieu de résoudre le problème de la situation 2 en reprenant tout à zéro, nous aurions peut-être pu nous servir de la solution du premier problème. En particulier pour le cas où les triangles dont on cherche les troisièmes sommets C sont rectangles en C, qui est le cas le moins évident.

A chaque triangle isocèle ABC tel que $AB=CB$ correspond un triangle rectangle que l'on trouve en traçant la médiatrice de AC (figure 7) : si C' est le milieu de AC, le triangle ABC' est rectangle en C'. Oublions alors les triangles dessinés et ne regardons plus que les points A, C et C'. Que décrit le milieu C' de AC, lorsque C parcourt le cercle centré en B de rayon AB ? On peut voir C' comme l'image de C par une homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. La courbe décrite par C' est donc l'image du cercle (figure 8) centré en B de rayon AB que décrit C. Il s'agit donc du cercle centré au milieu de AB et de rayon $\frac{AB}{2}$.

Voir des liens entre les concepts : ici, les triangles isocèle et rectangle.

Isoler par la pensée ce qui importe pour résoudre le problème.

Le fait d'évoquer un concept (ici l'homothétie) rend disponible une série de propriétés.

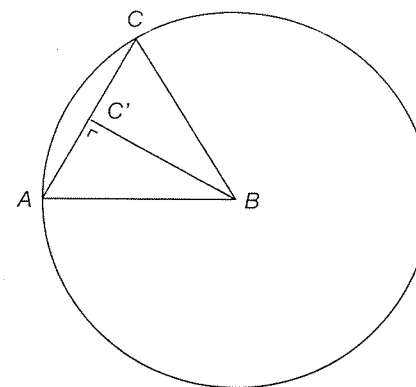


figure 7

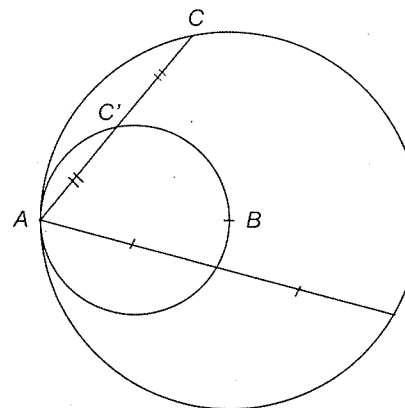


figure 8

Cette nouvelle résolution du problème des triangles rectangles en C apporte une preuve supplémentaire du fait que si ABC est rectangle en C, alors C est sur le cercle de diamètre AB. Nous avons donc donné trois preuves de cette proposition. La première utilisait essentiellement une propriété des diagonales du rectangle, la deuxième utilisait notamment la propriété de la somme des angles d'un triangle, la troisième utilise notamment une propriété des homothéties. La question que l'on pourrait se poser maintenant est « comment est-il possible de démontrer le même résultat en se basant sur des propositions apparemment très éloignées les unes des autres ? ». Il se pourrait par exemple que certaines d'entre elles se démontrent à l'aide des autres ou même à l'aide du résultat qu'elles ont permis ici de démontrer. Ces questions pourraient déboucher sur un essai d'organisation déductive des premiers résultats de la géométrie... mais ce n'est pas l'objet de cette étude.

Les sections suivantes sont consacrées au développement de quelques aptitudes utiles à la résolution de problèmes, notamment en géométrie.

Créer ou disposer de liens entre différentes connaissances

La possibilité de disposer de relations entre des notions acquises et l'aptitude à en établir de nouvelles sont essentielles dans la résolution de problèmes. Elles favorisent la mobilité de l'esprit indispensable à toute activité intellectuelle, y compris la géométrie. Comme l'a écrit POLYA [5], «une performance essentielle (peut-être la plus importante) du chercheur consiste à mobiliser des éléments appropriés de ses connaissances et à les relier au problème».

Si nous avons choisi d'insister sur cette aptitude, bien qu'elle ne soit pas spécifique à la géométrie, c'est parce que nous pensons qu'elle n'est pas encore suffisamment prise en compte dans l'enseignement de la géométrie.

Voyons plus précisément quelles aptitudes de ce type exige la résolution de problèmes.

Il faut pouvoir évoquer les connaissances adéquates. Ce qui distingue la résolution de problèmes de la compréhension d'une solution donnée est justement cette exigence de pouvoir aller chercher «dans un coin de sa tête» l'information utile. Les connaissances doivent être disponibles et donc «reliées» chacune à de nombreuses autres. Une étape déterminante dans la résolution d'un problème peut être d'en reconnaître un aspect familier (comme le triangle isocèle dans le cercle) et de se souvenir de résultats associés à cet aspect (comme l'égalité de deux angles dans un triangle isocèle) (POLYA [5]). Autre exemple: dans le problème des troisième et quatrième sommets du rectangle (page 4), le problème est pratiquement résolu si l'on pense à la propriété des diagonales du rectangle. Encore faut-il y penser...

Il faut pouvoir enrichir une figure ou une situation ou la regarder autrement. Pour pouvoir reconnaître un aspect familier dans une figure donnée, il faut souvent la compléter en une autre, y voir des segments non encore tracés,

etc. Par exemple, dans le problème du troisième sommet du triangle rectangle, le fait de compléter le triangle en un rectangle, puis de se représenter celui-ci avec ses diagonales, constituait un pas vers une solution. POLYA [5] parle d'*ajouter* et de *regrouper* (au sens de restructurer): par exemple ajouter un autre triangle rectangle au premier, puis associer quatre côtés pour voir apparaître un rectangle, ou encore ajouter des rayons et des cordes à un cercle, puis les regrouper pour les voir comme des côtés d'un triangle. Il arrive aussi que l'on puisse voir des choses nouvelles sans rien ajouter à une situation. POLYA parle de «modifier la «structure» de notre vision du problème».

Si le fait de pouvoir créer et disposer de liens entre les concepts favorise la résolution de problèmes, *il faut aussi parfois pouvoir isoler par la pensée une partie d'une situation*. On l'a déjà vu dans les problèmes analysés au début de ce texte. Certaines lignes s'évanouissaient au profit d'autres lignes qui apparaissaient autrement. POLYA parle d'*isoler* et de *combinaison*. Voici un autre exemple où il est utile d'isoler une partie d'une figure: sur une feuille blanche, on donne trois points non alignés A, B et C et on demande de colorier en rouge la partie de la feuille plus proche de A que de B et C, en jaune celle plus proche de B que de A et C, en bleu celle plus proche de C que de A et B. Certains sont déroutés par un tel problème parce qu'ils se demandent ce qu'il doit faire avec ces trois points (par exemple, ils font passer par C la ligne séparant la zone rouge de la jaune), d'autres ont tendance à tracer des lignes de séparation parallèles ou perpendiculaires aux bords de la feuille. Pourtant, on peut trouver rapidement la solution en se disant dans un premier temps que la ligne de séparation entre la zone rouge et la jaune ne dépend que de A et B et en éliminant pour un moment cet élément perturbateur que constitue le point C.

Il arrive encore trop souvent que les concepts de géométrie soient vus de façon statique et

isolée. Pour favoriser l'élaboration de relations entre les figures ou les concepts, nous proposons de présenter des situations qui poussent à enrichir une figure, par opposition à celles qui présentent un *portrait de base*² réduit à l'illustration des propriétés déterminantes liées à la définition du concept. Par exemple, le portrait de base² du rectangle est celui de la figure 9, tandis que la figure 10 présente quelques-uns des *portraits enrichis* du rectangle. On peut y voir le rectangle décomposé en deux ou en quatre triangles, ou obtenu par découpage et collage d'un parallélogramme, ou inscrit dans un cercle, ou circonscrit à une ellipse, ou encore faisant partie d'une famille de rectangles isopérimétriques ou isosupercielles. On y voit aussi un dessin de parallélépipède rectangle dont les faces apparaissent soit sous forme de rectangle, soit sous forme de parallélogramme, et enfin un rectangle quadrillé qui peut évoquer un produit (2 x 3) ou la formule d'aire du rectangle.

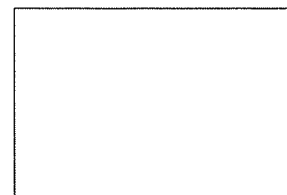
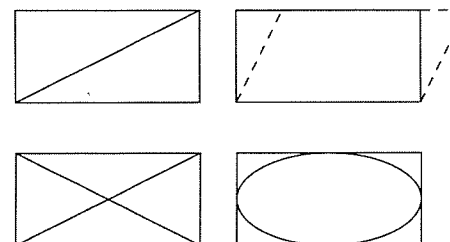


figure 9



2. Sur les concepts de *portrait enrichi* et de *portrait de base*, voir aussi CREM [1]

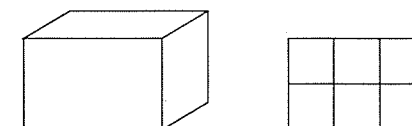
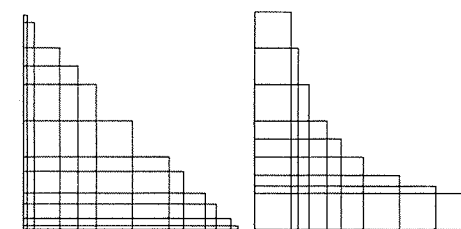
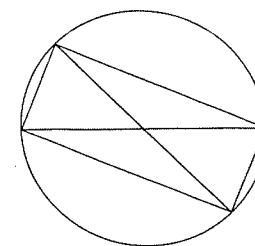


figure 10

Tous ces portraits peuvent être découverts grâce à des activités appropriées. Par exemple, des activités d'assemblage de triangles, de dessins, de constructions de rectangles avec une ficelle, etc. Ce type d'activités permet aussi de travailler les concepts *par famille* et *dans un contexte*, par opposition à l'étude décontextualisée de monographies, et parfois de travailler en même temps «le mouvement pensé» ou la symétrie, deux instruments de pensée qui sont commentés aux sections suivantes.

Il est important aussi de développer des liens entre différentes matières. Par exemple, les connaissances des objets du plan et celles des objets de l'espace peuvent s'appuyer les unes sur les autres. On peut travailler cela via le tracé ou l'interprétation de représentations, les développements, les mouvements spatiaux appliquant une figure plane sur une autre, etc.

La géométrie peut aussi fournir des supports visuels aux nombres et aux opérations. On peut par exemple visualiser les nombres, l'addition et la soustraction sur une droite, représenter les produits par des rectangles, sans parler des nombres figurés (les nombres carrés, triangulaires, etc.) et des fractions et des opérations qui portent sur elles et qui se représentent de façon privilégiée sur des supports géométriques.

Imaginer des mouvements

L'idée de mouvement est absente des mathématiques axiomatiques actuelles. Dans *Les fondements de la géométrie* de D. HILBERT [4], il n'est jamais question d'appliquer un segment sur un autre pour les faire coïncider ou de faire glisser un triangle le long d'une droite ou autour d'un point pour le voir dans une autre position. Lorsque l'on veut évoquer ce qu'on appellerait la «superposabilité» dans le langage courant, on parlera plutôt de *congruence* de segments ou de figures, terme dont l'utilisation est régie par un groupe d'axiomes. Ce qui permet de modéliser l'idée de mouvement en lui-même, en tant que façon d'envoyer des points sur d'autres points, est le concept de *transformation* (du plan, de l'espace, ...). Mais celui-ci se distingue de l'idée mouvement en tant que déplacement ou en tant que déformation continue, notamment en ce qu'on ne s'intéresse nullement aux étapes intermédiaires de ce mouvement. Une transformation associe à chaque point (du plan, de l'espace, ...) un point image. Le concept de transformation ne renvoie donc pas à l'idée du chemin que les points pourraient emprunter pour atteindre leur image.

La raison de la volonté d'éliminer l'idée de mouvement des mathématiques formelles est de se prémunir contre les dangers des raisonnements intuitifs, se basant sur une interprétation de la réalité au lieu de n'utiliser que les axiomes ou les propositions déjà démontrées, lors de l'organisation déductive de résultats mathématiques. N. ROUCHE a dit que «le formalisme,

c'est l'oubli méthodologique du sens». Lorsqu'on écrit des mathématiques formelles, on met de côté (pour un temps) les intuitions que l'on a et qui pourraient induire un manque de rigueur. Dans une certaine mesure, on privilégie la «forme» au détriment du sens, ou du moins d'une partie du sens, celle constituée d'images mentales, d'exemples, de contextes, de mouvements,...

Par contre, cette idée de mouvement intervient très souvent dans la constitution des mathématiques lorsque la pensée est encore en recherche. Et c'est d'ailleurs bien parce qu'elle prend une place importante dans la pensée intuitive que des mathématiciens comme D. HILBERT ont pris soin de s'en libérer dans l'écriture de preuves formelles.

Voyons comment cette idée de mouvement intervient dans la pensée géométrique.

Le mouvement est utilisé pour amener une figure dans une position privilégiée. On l'a vu dans la résolution des deux problèmes de départ, certaines figures sont plus facilement identifiables dans une position privilégiée. Par exemple, on reconnaît plus facilement qu'un triangle est isocèle si son axe de symétrie est vertical, et les propriétés qu'il vérifie (par exemple, le fait que la médiatrice de sa base passe par le sommet opposé) apparaissent plus facilement dans cette position. Mais il n'est pas toujours nécessaire de redresser effectivement cette figure pour la percevoir facilement, il suffit parfois de «penser ce mouvement» de redressement. Pour lire un plan de ville tout en roulant et savoir si, pour emprunter telle rue, il faut virer à gauche ou à droite, certains tournent le plan sur leurs genoux, d'autres ne le font qu'en pensée. Le «mouvement pensé» constitue donc aussi un moyen d'appréhender l'espace.

Le mouvement engendre des figures géométriques. Le cercle est engendré par une extrémité d'un segment qui tourne autour de l'autre. Le fait de concevoir ainsi le cercle, plutôt

que de le voir comme un ensemble de points équidistants du centre, est utile dans la résolution de problèmes. De même, le cône peut être engendré par une droite qui tourne autour d'un axe qui lui est sécant, en gardant toujours la même inclinaison par rapport à cet axe.

Le mouvement est utilisé pour parcourir une famille infinie d'objets et pour accéder à des objets extrêmes. On l'évoque, par exemple, pour parcourir mentalement l'infinité des triangles isocèles de base fixée AB . Le mouvement consistant à déplacer continûment le sommet sur la médiatrice de AB permet de parcourir cette famille infinie et d'imaginer tous les triangles isocèles (à similitude près), y compris des triangles de hauteur très grande ou très petite.

Le mouvement crée des liens entre diverses notions géométriques. C'est le cas, par exemple, pour le rectangle et le parallélogramme: quatre tiges rigides articulées fournissent un moyen de visualiser le mouvement permettant de passer continûment d'une figure à l'autre.

La continuité d'un mouvement est évoquée pour se convaincre de l'existence d'une situation. Donnons un exemple: on veut savoir si une section de tétraèdre régulier par un plan peut être carrée. On se persuade aisément qu'une telle section peut être rectangulaire: on choisit pour cela un plan parallèle à deux arêtes non coplanaires (figure 11). Mais en déplaçant ce plan d'une arête vers l'autre, on déforme le rectangle. La section passe d'un rectangle allongé dans un sens (lorsque le plan est près d'une des deux arêtes) à un rectangle allongé dans l'autre sens (lorsque le plan est près de l'autre). Comme ce mouvement déforme continûment cette section, qui conserve par ailleurs son caractère rectangulaire, celle-ci doit forcément passer par un stade intermédiaire: le carré. Remarquons que nous pourrions également prouver cela en évoquant l'argument de symétrie (des deux parties de tétraèdre séparées par une telle section).

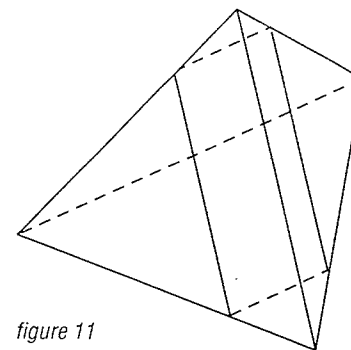


figure 11

Autre exemple: on voudrait couper un quadrilatère quelconque en deux parties de même aire, et ce à l'aide d'une droite. Construire une telle droite n'est pas évident. Y a-t-il seulement une solution? En fait, on peut voir qu'il y a une infinité de solutions. Plus précisément, par tout point (même extérieur au quadrilatère) il passe au moins une droite séparant ce quadrilatère en deux parties de même aire. Pour le voir, fixons un point quelconque P et prenons une droite d quelconque passant par P . Orientons cette droite, de manière à pouvoir parler de sa droite et de sa gauche. Supposons maintenant que l'aire de la partie de quadrilatère située à droite de d soit supérieure à celle de la partie de gauche. Faisons alors tourner d autour du point P . Au bout d'un demi-tour, la situation est inversée: l'aire de la partie située à droite de d est inférieure à celle de la partie de gauche. Comme ce changement s'est fait de façon continue, la droite est forcément passée, lors de sa rotation, par une position où l'aire du quadrilatère est correctement répartie. Nous prouverions de la même manière que dans n'importe quelle direction, il existe une droite séparant ce quadrilatère en deux parties de même aire. Le mouvement évoqué serait alors une translation continue.

En plus d'être un instrument de pensée dans la résolution de problèmes, le mouvement est évidemment utilisé dans la représentation intuitive des transformations comme les isométries, les similitudes, les dilatations, les cisaillements, etc.

Cette aptitude à penser un mouvement peut être préparée dès le plus jeune âge d'abord en bougeant (la psychomotricité), c'est-à-dire en vivant des mouvements avec son corps, mais aussi en regardant ceux des autres, en les mimant avec ses mains, etc. Mais à tous les âges, on peut favoriser les activités qui nécessitent d'anticiper un mouvement (plus ou moins compliqué) d'objets (plus ou moins concrets, plus ou moins compliqués), et qui mettent en œuvre certaines des propriétés du «mouvement pensé» développées plus haut.

Repérer des symétries

Contrairement au mouvement, la symétrie est un *concept* mathématique que l'on étudie dès l'école primaire. Alors pourquoi la citer parmi les instruments de pensée ? Parce que cette notion est à la fois un instrument de pensée et un concept mathématique. De même que le mouvement se modélise mathématiquement en les concepts de congruence ou de transformation, la symétrie en tant qu'instrument de pensée se modélise mathématiquement en le concept de... symétrie, ou plus généralement d'isométrie.

D'ailleurs lorsqu'on veut justifier rigoureusement une impression perçue en utilisant des arguments de symétrie, c'est-à-dire donner une démonstration de la conjecture découverte, il arrive le plus souvent que le concept de symétrie (ou d'isométrie) soit l'élément clé de la démonstration.

Mais... les isométries sont des transformations, observera-t-on. Qu'est-ce qui distingue alors le mouvement de la symétrie, pris tous deux comme instruments de pensée ? Seulement le fait que le mouvement recouvre des transformations plus diverses ? En fait, lorsqu'on évoque l'argument de symétrie, on s'intéresse plus au résultat d'une transformation éventuelle qu'à sa trajectoire ou aux états intermédiaires de cette trajectoire. Par exemple, lorsqu'on évoque la symétrie

pour s'assurer de l'existence d'un carré comme section d'un tétraèdre régulier, on ne pense pas à la façon dont une des parties de tétraèdre peut être envoyée sur l'autre, et à sa trajectoire éventuelle (s'il s'agit d'un déplacement), mais plutôt au fait que ces deux parties sont «pareilles» et que vu leur «régularité», cela ne peut donner lieu qu'à une section dont les angles ainsi que les côtés sont «les mêmes». Par contre, lorsque, pour résoudre le même problème, on évoque le mouvement comme décrit précédemment, ce sont les états intermédiaires (dont l'un présente une section carrée) de ce mouvement qui nous intéressent.

Relevons les manières dont l'argument de symétrie intervient dans la pensée.

La symétrie complète le mouvement et se combine avec lui. Il arrive souvent que pour percevoir une symétrie on redresse, fût-ce mentalement, une figure. D'autre part, là où certains percevront directement une symétrie, d'autres évoqueront le mouvement. Considérons par exemple un prisme non droit dont la base est un hexagone régulier et dont deux des faces latérales sont rectangulaires. Nous aimerions montrer que les quatre autres faces latérales sont isométriques. Un premier argument de symétrie directement perceptible (que l'on expliciterait en évoquant la symétrie orthogonale par rapport à un plan bien choisi perpendiculaire aux deux bases) nous convainc qu'elles sont isométriques deux à deux. Le fait qu'elles le soient toutes les quatre l'est moins, car toutes ces faces ne sont pas «inclinaées» de la même façon. Mais un deuxième argument de symétrie nous permet de constater que les angles α et β notés sur la figure 12 sont de même amplitude: cet argument ne s'explique plus en évoquant une symétrie orthogonale par rapport à un plan, mais plutôt une symétrie axiale, c'est-à-dire une rotation de 180 degrés autour d'un axe bien choisi, rotation que l'on peut visualiser en faisant tourner le prisme, au départ posé sur une base, pour le poser sur son autre base.

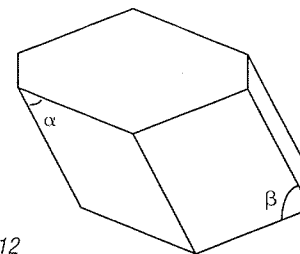


figure 12

L'argument de symétrie comme raison suffisante. Comme on l'a dit, on perçoit tout de suite que le lieu des points équidistants de deux points donnés A et B est la médiatrice du segment AB . De même, en évoquant la symétrie de la situation, on voit directement que le lieu des points équidistants à deux droites sécantes ne peut être que l'union des deux bissectrices des angles qu'elles forment.

On évoque la symétrie pour se ramener à une situation connue. Nous avons déjà cité des exemples plus haut (pages 2 et 3). Ajoutons celui lié au problème suivant: on cherche le plus court chemin entre les points A et B , passant par un point de la droite d (figure 13). Une solution immédiate consiste à considérer le point B' , symétrique de B par rapport à d . Le plus court chemin de A à B' passant par un point de d est évidemment le segment AB' . Notons C le point d'intersection de AB' et d . En évoquant la conservation des longueurs par symétrie, on déduit que le chemin cherché est composé des segments AC et CB .

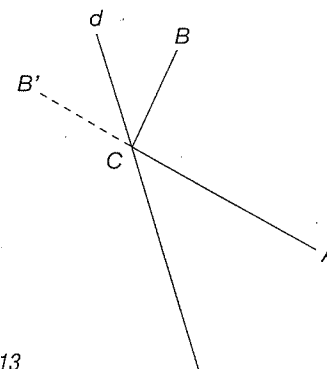


figure 13

La symétrie crée des liens entre diverses figures géométriques. En ce sens, elle constitue aussi un moyen d'appréhender la structure des objets de l'espace et des figures planes. Ainsi les formes géométriques de la figure 14 peuvent être découpées dans du papier en pliant celui-ci en deux et en donnant exactement deux coups de ciseaux. Le point commun entre les formes géométriques de la figure 15 est le nombre et la disposition de leurs axes de symétrie. Les petits enfants ont accès à ces ressemblances via notamment la fabrication de motifs par pliage et découpage de papier. La symétrie apparaît aussi comme un moyen d'engendrer des figures géométriques, éventuellement infinies, comme celles que l'on obtient en utilisant deux miroirs (ou plus) placés face à face, parallèles ou formant un angle.

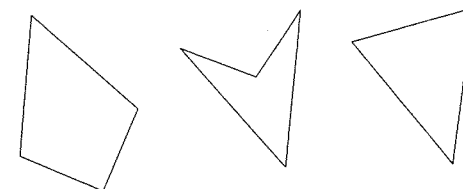


figure 14

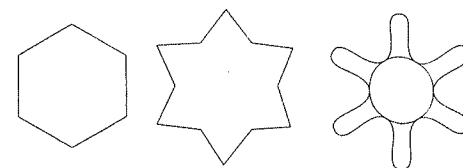


figure 15

Tout petit, l'enfant est amené à *percevoir* et à *reproduire* (dans ses dessins ou ses constructions) la symétrie des êtres ou des objets qui l'entourent. Mais il est aussi important que l'enfant apprenne à s'appuyer sur la symétrie pour *structurer l'espace* et pour *argumenter*. Les activités liées aux miroirs, aux pliages et découpages, aux frises, pavages et rosaces offrent de telles occasions. Il nous semble, en tout cas, essentiel de ne pas isoler la symétrie, mais au contraire de la présenter le plus souvent dans un contexte suffisamment riche.

Comparons deux activités. La première consiste à compléter le sapin de la figure 16 pour qu'il soit symétrique par rapport à l'axe vertical. La deuxième consiste à tracer deux segments issus d'un même point, puis à placer un miroir de façon à voir une figure fermée, et à dresser une liste des types de figures qui peuvent ainsi être obtenus. On pourra par exemple se demander s'il est possible d'obtenir un carré, un triangle, un parallélogramme,...

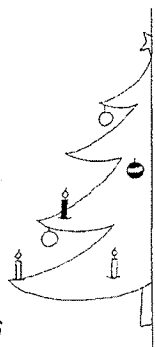


figure 16

Dans la première activité, la symétrie est imposée et la figure est figée. Dans la deuxième, c'est l'enfant qui, après un temps d'observation (et de réflexion), évoquera la symétrie – «c'est toujours la même chose dans le miroir et sur la feuille» – pour argumenter, par exemple pour exclure le cas du parallélogramme quelconque. La symétrie apparaît ici dans un contexte, celui du miroir et des figures géométriques qu'il permet de visualiser, et donne une clé de comparaison de ces figures. Dans cette activité, le mouvement, lui aussi, peut apparaître comme argument ou comme moyen d'exploration de ces figures: «si on place le miroir comme ceci, on obtient une figure convexe, si on le place comme cela, la figure est non convexe, et entre les deux, on obtient un triangle».

Imaginer des situations de l'espace

Dès qu'il arrive à l'école, l'enfant s'habitue au travail sur feuille. Il arrive encore souvent que la plupart des activités, géométriques ou autres, lui soient proposées sur papier. Il arrive aussi

que l'on aborde les problèmes intéressants de géométrie de l'espace vers quinze ans seulement. Pour certains, il est déjà tard pour se forger une «vision dans l'espace», cette capacité s'estompant si on ne l'exerce pas. Pourtant, travailler des situations de l'espace, c'est partir de ce que l'enfant côtoie, et beaucoup de beaux problèmes de géométrie de l'espace sont accessibles à de jeunes enfants: par exemple, la construction d'une maquette (éventuellement, à l'échelle), le modelage de solides en plastiline, le développement de solides, l'observation ou la prévision d'images d'objets dans un miroir,...

Les programmes (belges) de l'enseignement primaire insistent sur la compétence «savoir structurer l'espace». Que signifie cette expression? Elle recouvre plusieurs compétences comme:

- saisir la structure des objets (par leurs régularités, leurs symétries,...),
- repérer les ressemblances et les différences de structures entre objets, ce qui implique aussi de reconnaître dans certains objets la structure d'autres objets,
- repérer ou imaginer les positions relatives d'objets entre eux, ou de soi-même par rapport à des objets,
- repérer les ressemblances et les différences de structures entre situations, ce qui implique aussi de reconnaître dans certaines situations la structure d'autres situations,...

Parmi les activités qui permettent de «saisir l'espace», citons les représentations planes d'objets de l'espace, qui ont joué un rôle important dans l'évolution de la (ou des) géométrie(s). C'est également un sujet accessible et attrayant dès le plus jeune âge, plus précisément dès que l'enfant est capable de tenir un crayon ou de s'intéresser aux images d'un livre. De plus, la capacité d'interpréter des représentations est utile dans la vie de tous les jours (plans de ville, plans

de montage, photos, jeux vidéo, etc.) et dans de nombreux domaines scientifiques comme la géographie, la chimie, l'architecture, la mécanique, la cristallographie, l'astronomie, etc.

Pourtant, les activités ayant trait aux représentations sont souvent négligées à l'école, probablement parce qu'elles ne visent pas directement des concepts mais plutôt des comportements, comme le fait de coordonner plusieurs vues, de s'imaginer ce que l'on verrait à une autre place, de mettre en évidence la structure (les propriétés) des objets, non pour les décrire mais pour les dessiner, d'imaginer les côtés cachés d'un objet, etc.

Distinguons plusieurs types d'activités de représentation.

Un premier type concerne la *représentation en trois dimensions d'objets de l'espace*. Il s'agit d'inventer et de construire, ou de reproduire des objets dans divers matériaux³ (plastiline, cartons, legos,...).

Le *passage de représentations planes aux situations spatiales ou aux objets qu'elles représentent (et vice versa) est également source d'activités intéressantes*. Il peut s'agir, par exemple, de disposer plusieurs photos d'une même construction aux endroits correspondants à leur prise de vue, ou encore, de repérer sur un plan un lieu connu.

Un autre type d'activités concerne l'*interprétation de représentations planes d'objets inconnus*. Par exemple, on peut imaginer et construire une maison en Dupplos dont on possède quatre photos (cf. activité de M. MEURET en maternelle décrite dans CREM [2]) ou encore un assemblage de petits cubes à partir de plans cotés ou de dessins en perspective (cf. activités en maternelle et en primaire décrite dans M. DE TERWANGNE [3]).

3. Le CREM a développé de nombreuses activités de représentation de l'espace dans [2]

Enfin, la *représentation plane d'objets réels ou imaginés* sous diverses formes (perspective parallèle, par exemple à l'aide de papier pointé, représentation en projection orthogonale, plan coté,...) est également source d'apprentissages géométriques enrichissants (cf. M. DE TERWANGNE [3] et CREM [2]).

Toutes ces activités présentent des possibilités à tous les âges de l'enseignement fondamental (et plus).

S'exprimer et argumenter

Distinguons deux composantes du langage: le vocabulaire et l'expression.

Le vocabulaire. Dans les mathématiques constituées, le choix d'une terminologie est arbitraire. Evidemment aucun mathématicien ne s'amuse à employer une terminologie complètement différente de celle en usage dans son domaine. Cela rendrait ses travaux moins lisibles. Mais il arrive quand même qu'un même mot désigne des concepts (légèrement) différents d'un ouvrage à l'autre. Evidemment il est essentiel que le vocabulaire choisi ne varie pas au sein d'une même théorie. Mais l'objet des mathématiques n'est pas d'étudier du vocabulaire.

Est-il plutôt d'étudier des concepts? Pas vraiment. Il est vrai que toute théorie mathématique comprend une part de définitions, mais les concepts introduits le sont toujours pour simplifier l'exposé de la théorie, et celle-ci n'a d'intérêt que si elle répond à des problèmes ou explique des phénomènes. Les mathématiques trouvent leur sens non dans l'étude de concepts mais dans la résolution de problèmes. Pour parler clairement, on peut se demander si le fait de nommer les formes de la figure 17 est une activité spécifiquement mathématique. Par contre, le fait d'essayer de reconstituer la cinquième à l'aide des quatre premières (ou de justifier le fait que c'est impossible?) s'en rapproche plus. Cependant, dans cette dernière activité, pour communiquer sa

solution à quelqu'un d'autre, il est plus pratique de disposer du vocabulaire adéquat... A moins que ce ne soit l'occasion de l'apprendre ou de décider d'une terminologie commune. Le vocabulaire apparaît alors comme un moyen (ici, de s'entendre), non comme une finalité.

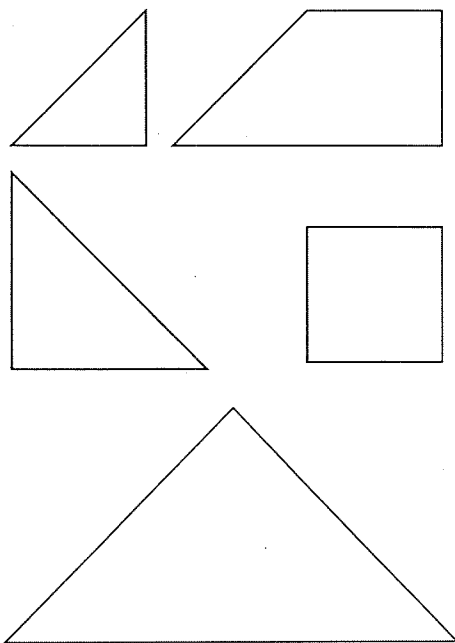


figure 17

Une fois acquise, une terminologie peut-elle être un outil de pensée ? Effectivement, les mots évoquent souvent un stock d'images mentales (cf. le portrait enrichi, page 17), où l'on peut puiser ce qui est nécessaire à la résolution du problème étudié. En ce sens, un substantif peut être un relais dans une implication. Les problèmes analysés au début de ce texte nous fournissent deux exemples illustrant cela: dans la preuve de la proposition que tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle (page 13), le fait de voir un triangle isocèle permettait de déduire l'égalité de deux angles. L'implication «les deux côtés sont égaux, donc les deux angles aussi» est réalisée de la façon suivante: «les deux côtés

sont égaux, donc c'est un triangle isocèle, donc les deux angles sont égaux». On peut faire le même commentaire à propos du mot *homothétie* dans la justification du lien entre les solutions des deux problèmes de départ (ceux du troisième sommet des triangles isocèle et rectangle, cf. page 14).

L'expression et l'argumentation. Après la résolution individuelle d'un problème ou pendant la recherche en groupes, l'échange verbal stimule le raisonnement, incite à objectiver ses idées, à dépasser ses intuitions. Il en va de même de l'expression écrite, lors d'une synthèse par exemple. La communication est donc une source importante de progrès en mathématiques.

De plus, le langage permet de transposer son savoir géométrique au niveau de la conceptualisation, de ne pas en rester aux images mentales. Par exemple, le fait de devoir dire ce qu'est un rectangle, avec des mots et sans dessin, force à en identifier les propriétés déterminantes.

Il est donc important de stimuler l'expression orale et écrite (aux âges où elle est possible). Cette activité intellectuelle que constitue l'expression peut vraiment être considérée comme une activité mathématique, source de structuration et d'apprentissage.

Cela ne signifie pas que l'expression est *indispensable* à toute argumentation. Il existe des argumentations muettes. On s'en rend compte quand on observe un jeune enfant explorant une situation géométrique. Il arrive que l'on ne puisse expliquer son comportement qu'en supposant qu'il a argumenté, même s'il n'est pas parvenu à justifier ses actes.

De plus les premières inférences géométriques ont leurs racines dans l'expérimentation (cf. CREM [1]). On peut donc favoriser les prémisses de l'argumentation en multipliant les occasions d'explorer des situations variées faisant intervenir mouvement, symétrie, situation dans l'espace, etc.

Les instruments de pensée comme critères de choix

Il reste encore beaucoup d'autres outils de pensée indispensables à la résolution de problèmes en mathématiques et dans d'autres disciplines (cf. par exemple POLYA [5]). Citons, par exemple, le fait de simplifier un problème ou de considérer un cas particulier avant d'aborder le problème général, ou encore de le décomposer en tâches plus faciles. Le fait aussi d'oser expérimenter ou manipuler (au lieu de vouloir trouver directement «une formule»).

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons voulu développer les outils qui nous paraissent les plus spécifiques à la géométrie et ceux qui nous semblent les plus négligés dans cette branche des mathématiques. Il nous semble que ces outils peuvent servir de critères dans le choix d'activités géométriques, ce qui ne signifie pas qu'ils permettent d'en inventer. Néanmoins, les enseignants

qui se sont un jour acharnés sur un problème et qui ont pris du plaisir à chercher et à le résoudre, qui ont appris à aimer les difficultés et à surpasser les craintes et les blocages que nous rencontrons tous, sentent bien quand une activité est intéressante pour des élèves. Nous espérons que les critères que sont les instruments de pensée exposés ci-dessus viendront alors confirmer l'opinion qu'ils en ont, leur permettront de la défendre aux yeux des autres (inspecteurs, parents,...) ou de choisir une activité parmi plusieurs jugées éducatives.

NICOLAS ROUCHE et BENOÎT JADIN ont contribué par leurs commentaires à améliorer ce texte. Je les en remercie chaleureusement.

Références

- [1] Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), *Formes et mouvements, Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Nivelles, 1999.
- [2] Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans*, Nivelles, 1999.
- [3] M. DE TERWANGNE, M. MEURET, *Des compagnons bâtisseurs, Construire et dessiner des immeubles*, GEM, Louvain-la-Neuve, 1998.
- [4] D. HILBERT, Les principes fondamentaux de la géométrie, trad. L. Laugel, in *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, III.s.-17 (1900), pp.103-209.
- [5] G. POLYA, *La découverte des mathématiques*, Tomes 1 et 2, Dunod, Paris, 1967.