Activités avec GeoGebra

Optimisation

Christine Docq, Sabine Hausmann, Dany Legrand, André Malo, Rosane Tossut

avec la collaboration de

Anne Baudhuin, Jean-Baptiste Coulaud, Cristobald de Kerchove

Introduction

Ce document propose une séquence d'apprentissage de l'optimisation à l'aide de GeoGebra. Le logiciel est utilisé pour visualiser les situations et conjecturer les solutions. Il faut cependant garder à l'esprit que l'objectif principal est la maitrise de l'usage de la dérivée dans les problèmes d'optimisation.

Les quatre situations présentées dans cette séquence sont classiques et ont été choisies en fonction de l'utilisation du logiciel.

1. Le volume maximal d'une boite obtenue en coupant les quatre coins d'une feuille carrée est l'occasion de passer de la manipulation papier à la construction d'une figure mobile en GeoGebra dans trois fenêtres différentes : la feuille découpée en 2D, la visualisation de la boite en 3D et le graphique de la fonction volume.

   La capsule vidéo jointe présente un exemple de résolution. Voici deux manières de l'utiliser :
   - le professeur peu familiarisé avec le logiciel peut suivre pas à pas les commandes pour la réalisation et refaire ensuite sa propre construction ;
   - les élèves peuvent la visionner avec l'objectif de réaliser eux-mêmes la figure pour les problèmes suivants.

   La résolution algébrique assez simple confirme et précise la solution.

2. Le problème de minimisation de la longueur des tuyaux d'une descente d'eau symétrique permet de faire construire aux élèves une figure en 2D sans grosse difficulté.

3. Le cylindre de volume maximal dans une sphère est l'occasion de construire une visualisation en 3D.

4. Le problème de maximisation du volume d'une pyramide droite à base carrée pour une surface latérale donnée donne l'occasion d'un réinvestissement.

Il va de soi que de nombreux autres exercices sont nécessaires pour la maitrise de cette matière.

Quelques indications méthodologiques sont présentées sur fond grisé.

Problème 1

On veut construire une boite sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'un grand carré et en repliant vers le haut les bords libres. Déterminez la boite de plus grand volume qu'il est possible d'obtenir.

a) Réalisez concrètement la boite en partant du carré construit sur le petit côté d'une feuille A4 et calculez son volume.

b) Élaborez un fichier GeoGebra avec une première fenêtre pour dessiner la situation en deux dimensions, une seconde pour visualiser la situation en trois dimensions et une dernière pour construire le graphique du volume en fonction du côté des petits carrés.

c) Vérifiez analytiquement la réponse pressentie à l'aide des manipulations concrètes et du logiciel.

a) Constructions concrètes

Pour que les élèves prennent conscience de la variabilité du volume en fonction de la longueur des côtés des carrés découpés, on leur fait réaliser au préalable la boite en ayant réparti différentes mesures des côtés des petits carrés, de 1 à 10 cm ; on demande aussi à chaque élève de calculer le volume de sa boite.

On propose aux élèves de comparer les boites construites : si on couche les plus hautes, on remarque qu'elles rentrent dans les plus larges et ont donc un volume inférieur.

On collecte les résultats des volumes dans un tableau en désignant par l la longueur des côtés des petits carrés et par $V(l)$ le volume calculé. On fait ensuite élaborer une conjecture relative au maximum de ce volume.

b) Travail avec le logiciel GeoGebra

Vous trouverez la capsule vidéo ici :
https://www.dropbox.com/s/6gni9ls6an6flu6/Capsule_Volume_Maxi_Boite.wmv?dl=0
Le fichier GeoGebra est disponible sur GeoGebraTube :
https://www.geogebra.org/m/UaQaCTpQ?doneurl=%2Fgem_lln
Il s'agit d'**un** exemple d'utilisation de GeoGebra ; il y a d'autres résolutions possibles. Nous n'avons pas limité la variation des objets aux situations vraisemblables, pour attirer l'attention sur les domaines de validité.

Le travail avec GeoGebra se déroule en trois étapes :
- réaliser le découpage de la feuille dans une première fenêtre 2D,
- construire la boite dans une fenêtre 3D,
- réaliser le graphique du volume en fonction de la hauteur de la boite dans une nouvelle fenêtre 2D.

Le graphique du volume est intéressant à plusieurs points de vue :
- il permet de vérifier les calculs effectués à l'étape a) et de repérer l'endroit approximatif du maximum ;
- on peut se demander si tous les points du graphique ont un sens pour le problème initial et à quel type de fonction le graphique correspond.

c) Recherche analytique du maximum

On espère que les élèves trouveront d'eux-mêmes qu'il faut recourir à la dérivée ; dans le cas contraire, on dirigera leur recherche dans ce sens.

Il faut d'abord élaborer analytiquement la fonction $V(l)$, volume de la boite et ensuite utiliser sa dérivée pour confirmer ou infirmer les conjectures faites aux étapes a) et b).

Comme le fond de la boite a une largeur de 21 cm diminuée de deux fois la longueur l du côté du carré et que la hauteur de la boite est celle de la longueur du côté du carré, on obtient pour le volume

$$V(l) = (21-2l)^2 l.$$

Dérivons cette fonction

$$V'(l) = 2(21-2l)(-2)l + (21-2l)^2.$$

En effectuant une mise en évidence, on obtient

$$V'(l) = (21-2l)[-4l + 21 - 2l]$$

ou encore

$$V'(l) = (21-2l)(21-6l).$$

La dérivée du volume s'annule donc soit en $l = \frac{21}{2}$ = 10,5 cm, soit en $l = \frac{21}{6} = 3{,}5$ cm.

Il est clair que la première racine ne convient pas puisqu'il n'y aurait plus de boite.

Vérifions que la deuxième racine donne bien un maximum local à la fonction volume.

- Soit on analyse le signe de la dérivée à gauche et à droite de cette racine : on a une expression du second degré en la variable l avec un coefficient positif pour le terme du second degré : l'expression passe donc bien du signe positif au signe négatif de part et d'autre de la valeur 3,5.

- Soit on analyse le signe de la dérivée seconde en cette racine

$$V''(l) = (-2)(21-6l) + (21-2l)(-6)$$

$$V''(l) = 24l - 168$$

et donc

$$V''(3{,}5) = -84.$$

Le signe de la dérivée seconde étant négatif, on a une concavité vers le bas et le point stationnaire correspond donc bien à un maximum local.

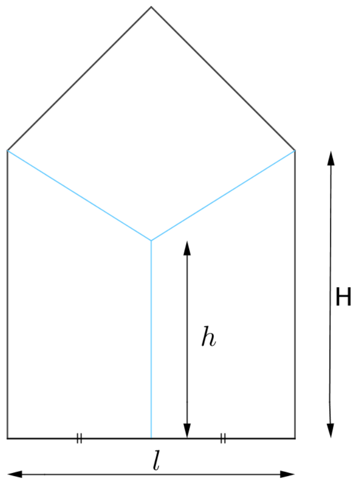
Calculons ensuite la valeur du maximum

$$V(3{,}5) = 686\ cm^3.$$

Dans la résolution de ce problème, nous avons abordé l'optimisation de trois manières différentes : expérimentale, informatique et analytique.
- Les essais concrets laissent supposer que la solution se situe entre 3 et 4 cm.
- Le graphique de la fonction volume, donné par le logiciel, permet d'approcher mieux cette solution.
- Le calcul analytique apporte une solution précise au problème.

Problème 2

Sur le pignon latéral d'un bâtiment, on veut récolter, en une seule descente centrale, les eaux de pluie des deux gouttières des façades opposées. A quelle hauteur placer le raccord pour minimiser la longueur totale des tuyaux ? Quel angle fait chaque portion oblique par rapport à l'horizontale ?



a) Résolvez le problème à l'aide de GeoGebra.

b) Vérifiez analytiquement votre réponse.

a) Travail avec le logiciel

Le professeur peut proposer aux élèves des valeurs différentes pour les dimensions du pignon. Les valeurs obtenues pour les hauteurs optimales sont différentes, mais l'angle obtenu est à chaque fois de 30°.

La réalisation est disponible sur GeoGebraTube :
https://www.geogebra.org/m/X8nsC5fV?doneurl=%2Fgem_lln
Les personnes qui désirent suivre la construction pas à pas peuvent utiliser la fenêtre « Protocole de construction » du logiciel.

b) Résolution analytique

Chaque élève résout le problème avec les valeurs numériques de H et l utilisées à l'étape a). La résolution générale est présentée ci-dessous.

La longueur totale des tuyaux correspond à la longueur h augmentée des deux longueurs obliques notées x. On peut exprimer ces longueurs x comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle

$$x = \sqrt{(H-h)^2 + \frac{l^2}{4}}.$$

Notons *f(h)* la longueur totale des tuyaux, avec $h \in [0, H]$

$$f(h) = h + 2 \cdot \sqrt{(H-h)^2 + \frac{l^2}{4}}.$$

Dérivons cette fonction

$$f'(h) = 1 + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\,(H-h)(-1)}{\sqrt{(H-h)^2 + \frac{l^2}{4}}} = 1 - \frac{2(H-h)}{\sqrt{(H-h)^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

Annulons cette dérivée

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(H-h)^2 + \frac{l^2}{4}} = 2(H-h)$$

ou encore

$$(H-h)^2 + \frac{l^2}{4} = 4(H-h)^2$$

$$3(H-h)^2 = \frac{l^2}{4}$$

$$H - h = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

et finalement

$$h = H - \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Vérifier analytiquement qu'il s'agit d'un minimum est une tâche ardue. Mais les graphiques obtenus par les élèves nous indiquent qu'il s'agit bien d'un minimum.

Calculons à présent l'angle α entre une portion oblique et l'horizontale grâce à la tangente

$$tg(\alpha) = \frac{\frac{l}{2\sqrt{3}}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc $\alpha = 30°$.
Remarquons que la hauteur optimale dépend des dimensions du pignon, mais que l'angle α, au contraire, en est indépendant.

Problème 3

Quelles sont les dimensions du cylindre de volume maximal que nous pouvons inscrire dans une sphère de rayon R donné ?

a) Résolvez le problème à l'aide de GeoGebra.

b) Vérifiez analytiquement votre réponse.

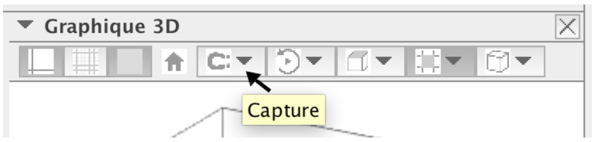
a) Résolution avec le logiciel GeoGebra

Ce problème relativement simple donne l'occasion aux élèves de se familiariser avec les constructions en 3D de GeoGebra. Il permet aussi de travailler sur une fonction du 3ème degré et sa dérivée.
Nous donnons ici **une** manière de procéder.
Nous avons remarqué que GeoGebra ne donne pas toujours des valeurs exactes pour le volume, nous avons préféré définir manuellement le calcul.

Cette réalisation est disponible sur GeoGebraTube :
https://www.geogebra.org/m/gb9jYWvE?doneurl=%2Fgem_lln

Construisons :
- un point O de coordonnées (0, 0, 0),
- une sphère de centre O et de rayon R=1, par exemple,
- un point C sur l'axe des z,
- un plan passant par le point C et parallèle au plan xOy,
- l'intersection de ce plan et de la sphère,
- C', le point symétrique du point C par rapport au centre O,
- un cylindre, C est le centre d'une base , C' le centre de l'autre base, le rayon est égal au rayon du cercle de l'intersection.

En déplaçant le point C, nous faisons varier le cylindre.
Pour éviter les sauts dans les déplacements du point C, il convient de désactiver le magnétisme par l'outil Capture de la Barre de style de la fenêtre 3D, après avoir sélectionné l'outil Déplacer/sélectionner.



Pour faire apparaitre les valeurs du rayon, de la hauteur et du volume, écrivons dans le Champ de saisie les définitions des nombres suivants :
- r=Rayon[e], e étant le nom donné au cylindre,
- h=Distance[C, C'],
- v=pi*r^2*h.
Les valeurs numériques seront lisibles dans la fenêtre Algèbre.

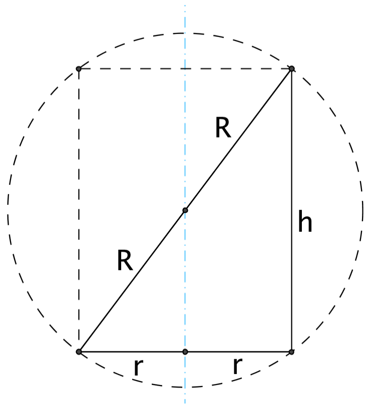
Pour obtenir le graphe du volume du cylindre en fonction de la hauteur :
- ouvrons la fenêtre Graphique 2 par le menu Affichage,
- créons un point P en écrivant dans le Champ de saisie : P=(h, v),
- faisons afficher le point P dans la fenêtre Graphique 2 par un clic droit sur P, Propriétés ..., Avancé, et en cochant la case correspondante,
- faisons afficher la trace par un clic droit sur le point P.
En déplaçant le point C, nous pouvons repérer un volume maximum pour des valeurs approximatives de h et de R .

b) Résolution analytique

Notons R le rayon de la sphère, r le rayon du cylindre et h la hauteur de celui-ci.
Le volume du cylindre s'écrit :

$$V(h,r) = \pi r^2 h$$

Le théorème de Pythagore nous donne la relation



$$h^2 + (2r)^2 = (2R)^2$$

$$h^2 + 4r^2 = 4R^2$$

$$r^2 = \frac{4R^2 - h^2}{4}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}\,.$$

Pour exprimer le volume en fonction d'une seule variable, nous pourrions remplacer h par $\sqrt{4R^2 - 4r^2}$, mais il est plus facile de remplacer r^2 par l'expression que nous venons d'obtenir

$$V(h) = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}.$$

Remarquons qu'en factorisant $V(h) = \pi h\left(R + \frac{h}{2}\right)\left(R - \frac{h}{2}\right)$ nous faisons apparaitre que cette fonction du 3ème degré admet trois racines : $h = 2R$, $h = 0$, $h = -2R$, mais le domaine de validité de cette fonction est $[0,\ 2R]$.

Pour trouver les extrémums de $V(h)$, dérivons cette fonction

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}\,.$$

Cherchons les racines de $V'(h)$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$\frac{3\pi h^2}{4} = \pi R^2$$

$$h^2 = \frac{4R^2}{3}$$

$$h = \pm\sqrt{\frac{4R^2}{3}}$$

$$h = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

La racine négative est à rejeter, car une hauteur doit avoir une valeur positive.

Ensuite, nous pouvons calculer le rayon r correspondant

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$$

$$r = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}R\ .$$

La racine négative est à rejeter, car un rayon doit avoir une valeur positive.

Donc notre solution est

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \cong 1{,}155\ R\ \text{ et } r = \frac{\sqrt{6}}{3}R \cong 0{,}816\ R\ .$$

Ces valeurs sont cohérentes avec les valeurs approximatives obtenues avec GeoGebra à l'étape a).

Remarquons que le diamètre du cylindre obtenu est plus grand que la hauteur, et est égal à $\sqrt{2}h$.

Bien que le graphique du volume montre qu'il s'agit d'un maximum, nous pouvons nous entrainer à le vérifier analytiquement.
Calculons la dérivée seconde

$$V"(h) = -\frac{3\pi h}{2}\,.$$

Cette dérivée seconde sera nulle si $h = 0$, positive si $h < 0$, négative si $h > 0$.
Donc, pour $h \in [0, 2R]$, elle sera toujours négative, la concavité de $V(h)$ sera tournée vers le bas, il s'agit bien d'un maximum.

Nous pouvons également utiliser un tableau de signes :

h		$-2R$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}R$		0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$		$2R$	
$V'(h)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$V(h)$	↘	0	↘	…	↗	0	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$	↘	0	↘

Les valeurs des cases grisées sont à exclure car $h \in [0, 2R]$.

Problème 4

On veut fabriquer une tente pyramidale à base carrée. On dispose d'un mât central télescopique. Le poids maximum pour la toile de la surface latérale est de 10 kg.

Quelles dimensions doit avoir la tente pour que son volume soit maximum, sachant que la toile pèse 500 g par m^2 ?

Si on choisit le poids de 10 kg pour la toile de la surface latérale, elle mesurera au total 20 m^2.

a) Résolution avec le logiciel GeoGebra

Nous donnons ici **une** manière de procéder, utilisant un curseur.

Cette réalisation est disponible sur GeoGebraTube :
https://www.geogebra.org/m/Qwm9HxZU?doneurl=%2Fgem_lln

Nous définissons :
- un curseur nommé a variant de 0 à 10, qui représente le côté de la base de la pyramide,
- un point A=(0,0),
- un point B=(a,0),

Ensuite, nous construisons la base de la pyramide avec l'outil Polygone, puis nous utilisons l'outil Extrusion pour construire une pyramide (désignée par la lettre e dans notre fichier) de hauteur égale à sqrt(400-x(B)^4)/(2x(B)), en utilisant le théorème de Pythagore.

Grâce au curseur, nous faisons varier le côté de la base de la pyramide. Dans la fenêtre Algèbre, nous pouvons suivre les valeurs de la hauteur et du volume correspondants.

Pour obtenir le graphe du volume du cylindre en fonction de la hauteur :
- ouvrons la fenêtre Graphique 2 par le menu Affichage,
- créons un point P en inscrivant dans le champ de saisie P=(a, Volume[e]),
- faisons afficher le point P dans la fenêtre Graphique 2 par un clic droit sur P, Propriétés …, Avancé, et en cochant la case correspondante,
- faisons afficher la trace (clic droit sur le point P).

En utilisant le curseur, nous pouvons encadrer le volume maximum par des valeurs approximatives du côté a et de la hauteur.

En bonus, l'outil Patron de GeoGebra crée un nouveau curseur et une animation du développement de la pyramide obtenue.

b) Résolution analytique

Une pyramide droite à base carrée est déterminée par la longueur x des arêtes de la base et par la hauteur H; nous aurons aussi besoin de la hauteur h des triangles de la surface latérale.

La surface latérale est composée de quatre triangles identiques de base x et de hauteur h. Sa formule est donc

$$S = 4\frac{xh}{2} = 2xh.$$

Nous devons respecter la contrainte

$$2xh = 20 \text{ ou } xh = 10.$$

Nous voulons maximiser le volume donné par la formule

$$V(x, H) = \frac{1}{3}x^2H.$$

Il faut trouver le lien entre les hauteurs H et h. Il est donné par la formule

$$H = \sqrt{h^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{100}{x^2} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{400-x^4}{4x^2}} = \frac{1}{2x}\sqrt{400 - x^4}.$$

Le volume s'écrit donc comme fonction de la seule variable x

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{1}{2x}\sqrt{400 - x^4} = \frac{x\sqrt{400-x^4}}{6}.$$

Dérivons cette fonction

$$V'(x) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{400 - x^4} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{400 - x^4}}(-4x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(2(400 - x^4) - 4x^4)}{\sqrt{400 - x^4}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{800-6x^4}{\sqrt{400-x^4}}.$$

Annulons cette dérivée

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{800}{6} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{400}{3}} \cong 3{,}398\ m.$$

Déterminons la hauteur de la tente

$$H = \frac{1}{2.\sqrt[4]{\frac{400}{3}}} \cdot \sqrt{400 - \frac{400}{3}} = \frac{1}{2.\sqrt[4]{\frac{400}{3}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 400}$$

ou encore

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\left(\frac{2}{3} \cdot 400\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(\frac{1}{3} \cdot 400\right)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{400}{12}} \cong 2{,}4\ m.$$

Comme pour le problème 2, le calcul de la dérivée seconde est ardu, mais le graphique de volume montre qu'il y a bien un maximum.

Réflexions sur l'utilisation de Geogebra :

Terminons cette séquence en relevant les apports spécifiques du logiciel.

D'une part, beaucoup d'élèves ont encore à cet âge de réelles difficultés avec les représentations planes d'objets de l'espace. L'utilisation de GeoGebra est une occasion d'exercer cette compétence.
Dans le premier problème, la construction concrète d'une série de boites et la manipulation d'une image 3D où l'on peut faire varier la hauteur de la boite, la faire basculer et tourner, permet de se familiariser avec ces représentations.
Les figures mobiles créées en 3D pour les problèmes 3 et 4 peuvent également améliorer la perception spatiale de ces représentations.

D'autre part, le graphe d'une fonction est souvent perçu comme un objet statique et son lien avec un phénomène n'est pas forcément facile à faire. La trace demandée d'une grandeur en fonction d'une autre dans la deuxième fenêtre 2D permet de voir la fonction se tracer point par point, en relation avec la représentation de la situation. La fenêtre algébrique fournit en plus les valeurs numériques correspondantes.
On peut également, après la résolution algébrique, tracer dans la deuxième fenêtre 2D la fonction trouvée et constater la superposition avec la trace obtenue.

Le travail avec le logiciel ne change pas fondamentalement l'apprentissage de l'optimisation mais il en facilite la compréhension, l'enrichit par les relations entre les différents aspects. Il peut également constituer un attrait pour les élèves par le côté ludique de la manipulation d'objets mobiles.

DOCUMENTS

Problème 1

On veut construire une boite sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'un grand carré et en repliant vers le haut les bords libres. Déterminez la boite de plus grand volume qu'il est possible d'obtenir.

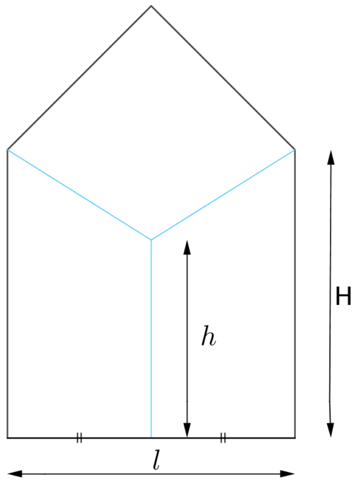
a) Réalisez concrètement la boite en partant du carré construit sur le petit côté d'une feuille A4 et calculez son volume.

b) Élaborez un fichier GeoGebra avec une première fenêtre pour dessiner la situation en deux dimensions, une seconde pour visualiser la situation en trois dimensions et une dernière pour construire le graphique du volume en fonction du côté des petits carrés.

c) Vérifiez analytiquement la réponse pressentie à l'aide des manipulations concrètes et du logiciel.

Problème 2

Sur le pignon latéral d'un bâtiment, on veut récolter en une seule descente centrale les eaux de pluie des deux gouttières des façades opposées. A quelle hauteur placer le raccord pour minimiser la longueur totale des tuyaux ? Quel angle fait chaque portion oblique par rapport à l'horizontale ?



a) Résolvez le problème à l'aide de GeoGebra.

b) Vérifiez analytiquement votre réponse.

Problème 3

Quelles sont les dimensions du cylindre de volume maximal que nous pouvons inscrire dans une sphère de rayon R donné ?

a) Résolvez le problème à l'aide de GeoGebra.

b) Vérifiez analytiquement votre réponse.

Problème 4

On veut fabriquer une tente pyramidale à base carrée. On dispose d'un mât central télescopique. Le poids maximum pour la toile de la surface latérale est de 10 kg.

Quelles dimensions doit avoir la tente pour que son volume soit maximum, sachant que la toile pèse 500 g par m^2 ?