Chapitre 9

L'arithmétique du petit Nicolas
ou
Qu'est-ce que "penser mathématiquement" ?

Une activité qui peut commencer avec des élèves de 10 ans à propos d'arithmétique, pair, impair et multiple, et qui peut se poursuivre jusqu'à 14 ans.

Comment chercher, réfléchir, prouver ?

Comment penser mathématiquement ?

Qu'est-ce que penser mathématiquement ? Comment apprendre aux élèves à faire des mathématiques ? Les mathématiques informelles existent-elles et sont-elles sérieuses ? Est-ce que la résolution de problèmes peut contribuer à l'apprentissage des mathématiques ? Pour répondre à ces questions, un exemple de situation-problème sera sans doute plus clair que des explications abstraites.*

On trouvera ci-dessous le récit d'une activité mathématique à la portée de tout lecteur qui ne connaît pas beaucoup plus que la distinction entre les nombres pairs et impairs. Cet article a été écrit pour être lu deux fois : une première fois en s'intéressant au fond mathématique des choses, et en essayant de répondre soi-même aux questions posées ; une deuxième fois en réfléchissant sur l'activité mathématique elle-même. Des notes dans les marges aideront à cette seconde lecture.

1. Nombres pairs et impairs.

Ça m'arrive de penser à des nombres, comme ça, peut-être parce que je n'ai rien de mieux à faire sur le moment. Ainsi, l'autre jour, je rêvais aux nombres pairs et impairs. Et je me disais que *la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.* Par exemple

Une constatation assez banale ; deux exemples.

$$2 + 6 = 8 \text{ et } 14 + 18 = 32.$$

D'ailleurs c'est normal : pair et pair donne pair !

Mais est-ce que c'est évident ? En me posant la question, j'ai vu des nombres dans ma tête, sous forme de paires de jetons côte à côte, formant deux rangées égales. Si j'ajoute (si je mets bout à bout) deux nombres de cette forme, j'obtiens un nombre de la même forme (Fig. 1).

Évocation d'une régularité qui, au fond, n'explique rien ; puis un léger doute

● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○
● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○

Fig.1

Explication simple, par un schéma.

Ensuite j'ai pensé que si *pair plus pair fait pair*, il serait bien normal qu'*impair plus impair fasse impair.* Et bien non, car

Analogie fallacieuse, suivie d'un contre-exemple.

$$7 + 15 = 22 \text{ !}$$

Mais est-ce que c'est toujours comme ça :

Doute.

$$\textit{impair} + \textit{impair} = \textit{pair} \text{ ?}$$

Une conjecture (c'est une propriété que l'on croit vraie, sans en être sûr) ; un besoin d'explication.

*Ce chapitre est dû à Nicolas Rouche. Il remercie Jeanette Bartholomé, Françoise Van Dieren et Marie-Françoise Van Troeye d'en avoir relu et critiqué le manuscrit.

Et comment est-ce que ça se fait ?

En fait, un nombre impair est fait de deux rangées de points dont l'une dépasse l'autre d'un point. Alors, si on les met bout à bout convenablement, on voit qu'on obtient toujours un nombre pair (Fig. 2).

Fig. 2

● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○
● ● ● ● ● ● ○ ○ ○

$$11 + 7 = 18.$$

Ceci dit, il est assez clair que *pair plus impair fait impair.* C'est ce que montre la Fig. 3.

Examiner tous les cas.

Fig. 3

● ● ● ○ ○ ○ ○
● ● ● ○ ○ ○ ○ ○

$$6 + 9 = 15$$

C'est bien beau tout ça, mais où cela me mène-t-il ?

2. Somme de trois nombres consécutifs.

Je pense soudain à un cas particulier : quand on regarde deux nombres consécutifs, il y en a toujours un pair et l'autre impair. Donc, *la somme de deux nombres consécutifs est toujours impaire.* Je n'y avais jamais pensé.

Un cas particulier, qui provoque une légère surprise.

Mais alors, la somme de trois nombres consécutifs sera peut-être toujours paire ? J'essaie :

Conjecture par analogie, suivie de deux contre-exemples : la conjecture s'avère fausse.

$$1 + 2 + 3 = 6,$$
$$4 + 5 + 6 = 15.$$

Tiens non ! Mais alors qu'est-ce qui se passe ? Je vais encore voir deux autres exemples, sait-on jamais ... Et j'écris

$$3 + 4 + 5 = 12,$$
$$8 + 9 + 10 = 27.$$

D'autres exemples pour confirmer.

Il se confirme que ça ne va pas. J'obtiens tantôt un pair et tantôt un impair.

J'étais déjà presqu'en train de penser à autre chose quand mes yeux tombent sur les quatre résultats : 6, 15, 12 et 27. Difficile de ne pas voir qu'ils sont tous les quatre multiples de 3. Étonnant ça !

Observation à peu près fortuite, obtenue parce qu'on a regardé assez d'exemples ; surprise.

Se pourrait-il que *la somme de trois nombres successifs soit toujours multiple de* 3 ? Mais, j'y pense tout à coup, ce

Nouvelle conjecture, tout de suite mise en doute par un contre-argument.

serait bizarre, car la somme de deux nombres consécutifs n'est jamais multiple de 2 ...

Voyons ça avec des rangées de points. Je mets côte à côte trois nombres consécutifs : 4, 5 et 6 (Fig. 4).

Recours à un exemple.

● ● ● ●
● ● ● ● ○
● ● ● ● ○ ○

Fig. 4

J'ai trois rangées de quatre points, plus un groupe de trois (j'ai mis des points blancs pour ceux-ci). *Trois* rangées de 4, cela fait un multiple de 3. Donc, au total, $4 + 5 + 6$ est bien multiple de 3.

Mais ce que je viens de voir sur la Fig. 4 s'étend sans peine à trois nombres consécutifs quelconques. Il y aura toujours *trois* rangées identiques, plus un groupe de trois points. La Fig. 5 le montre pour $8 + 9 + 10 = 27$.

L'exemple représentait clairement tous les cas possibles (on dit dans ce cas que l'exemple est *paradigmatique* : il sous-tend la preuve).

● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ○
● ● ● ● ● ● ● ● ○ ○

Fig. 5

Nouvel exemple (rassurant).

Ainsi je suis sûr maintenant que *la somme de trois nombres consécutifs est multiple de trois, aussi grands que soient ces nombres*. Quand j'y pense, c'est assez fabuleux. Par exemple

Certitude d'avoir atteint tous les cas, *en nombre infini*.

Jubilation.

$$123456789 + 123456790 + 123456791$$

Exemple extrême.

est un multiple de 3. Je le sais sans faire la somme et sans avoir à recourir au "caractère de divisibilité par trois" que j'ai appris à l'école.

Tout ça ne me servira peut-être pas à grand chose, et pourtant sait-on jamais ? Mais j'ai au moins appris que mon esprit peut saisir une infinité de cas.

Augmentation de la confiance en soi : le pouvoir de l'esprit.

3. Somme de quatre nombres consécutifs.

Ceci dit, j'ai bien envie de continuer sur ma lancée. J'imagine que *la somme de 4 nombres consécutifs sera multiple de 4* ... Encore que, comme la somme de deux nombres consécutifs n'est pas multiple de 2 ... Il faut essayer.

Continuer l'exploration ; une nouvelle conjecture.

Contre-argument et doute, suivi de recours à un exemple.

La Fig. 6 montre $3 + 4 + 5 + 6 = 18$.

● ● ●
● ● ● ○
● ● ● ○ ○
● ● ● ○ ○ ○

Fig. 6

J'y vois *quatre* rangées de 3, plus un groupe de 6. Or un multiple de 4 plus 6 n'est pas un multiple de 4. Donc la propriété n'est pas vraie...

L'exemple s'avère être un contre-exemple.

Et si je regarde cinq nombres consécutifs ? Je commence à 1, car j'ai compris maintenant que si je pars d'un autre nombre, j'aurai de toutes façons cinq rangées identiques, plus un groupe de points à droite. Mais les cinq rangées n'ont pas d'importance. La Fig. 7 montre $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

L'exploration continue ; découverte d'un raccourci méthodologique.

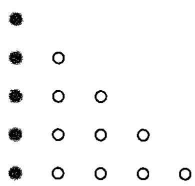

Fig. 7

Figure paradigmatique : elle donne accès à tous les cas, en nombre infini.

On y voit 5 points noirs (qui représentent 5 lignes de points noirs aussi longues que l'on veut), plus 10 points blancs. Puisque 10 est multiple de 5, *la somme de cinq nombres consécutifs* quelconques *est donc bien multiple de cinq.*

Voilà un énoncé qui vient *après* la preuve.

4. Sommes de nombres consécutifs.

Mais alors, j'y pense soudain, en récapitulant :

Découverte d'un *pattern* (c'est-à-dire d'une régularité).

la somme de 2 nombres consécutifs n'est pas multiple de 2 ;
la somme de 3 nombres consécutifs est multiple de 3 ;
la somme de 4 nombres consécutifs n'est pas multiple de 4 ;
la somme de 5 nombres consécutifs est multiple de 5.

Une sorte de rythme s'amorce là. Les choses ont l'air de se passer comme si

la somme d'un nombre pair de nombres consécutifs n'était pas multiple de ce nombre ;

Généralisation : deux conjectures.

la somme d'un nombre impair de nombres consécutifs était multiple de ce nombre.

Comment le savoir ? Je prends par exemple 7 nombres consécutifs. Et bien entendu je commence à 1. J'obtiens

Deux exemples étayent les conjectures.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Et si j'en prends 8, j'obtiens

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

Mes exemples confirment ce que je pense. Mais comment savoir si ça va toujours marcher ? Comment savoir par exemple si

$$1+2+3+\ldots+7003$$

Exigence d'une preuve.

est multiple de 7003 ? En voyant le 7003, j'ai des doutes. Et de toutes façons, je n'ai pas envie de faire des sommes aussi longues. Et même si j'en faisais beaucoup, je ne les ferais pas toutes, puisqu'il y en a une infinité. Que faire ? Plutôt aller dormir : j'ai la tête comme un seau !

Doute ; besoin d'une économie de pensée ; quelques exemples, et même beaucoup d'exemples ne forment pas un preuve.

Je reprends ce récit après une bonne nuit. Et ce matin, tout gaillard, je me dis qu'il faut peut-être en revenir à mes petits dessins. Est-ce que je ne pourrais pas trouver, en choisissant un nombre impair pas trop grand, une vue des choses qui m'éclaire pour *tous* les nombres impairs ? Pour changer un peu et parce que ce sera plus commode pour ce que je veux faire, je mets les nombres verticalement. Je fais une figure (Fig. 8) pour

La nuit porte conseil (Poincaré l'a déjà dit).

Une idée de méthode (celle des exemples paradigmatiques) inspirée par l'expérience du travail fait jusqu'ici.

$$1+2+3+4+5+6+7.$$

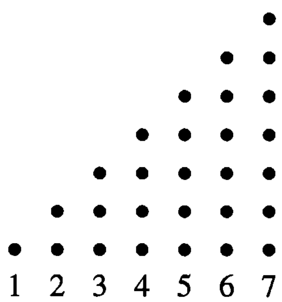

Fig. 8

Puisque 7 est impair, il y a un nombre au centre, ici 4. Pour bien le montrer, je remplace, dans cette colonne centrale, les points par des étoiles (Fig. 9).

Recours à une symétrie.

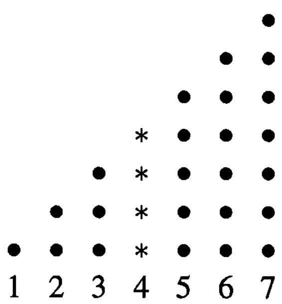

Fig. 9

Puis, je remplace par des points blancs ce qui, dans les colonnes de droite, est plus haut que la colonne centrale. Cela donne la Fig. 10.

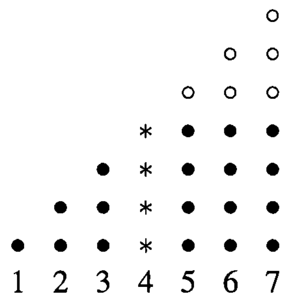

Fig.10

Ensuite, je peux placer ces points blancs au dessus des colonnes de gauche pour les rendre toutes égales à la colonne centrale. Autrement dit, je peux réorganiser le schéma comme sur la Fig. 11.

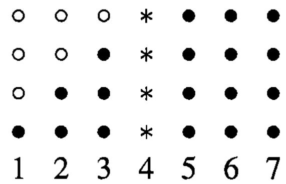

Fig.11

L'exemple est paradigmatique : il donne accès à tous les cas.

Et ainsi j'obtiens 7 colonnes égales, et donc un multiple de 7.

Et que ce soit 7 ou 9 ou 11 ou 13 ou ... 1995 ou n'importe quel nombre impair de colonnes, la manoeuvre marche toujours. Donc, *la somme d'un nombre impair de nombres consécutifs est multiple de ce nombre.*

Jubilation.

Fabuleux ça : car il y a une infinité de sommes de 3 nombres consécutifs, une infinité de sommes de 5 nombres consécutifs, etc., etc. Ainsi je vois clair dans une infinité d'infinités de résultats !

Curiosité, doute.

La méfiance critique et donc la prudence du jugement s'accroissent avec l'expérience.

Mais j'ai laissé traîner quelque chose en cours de route : je ne sais toujours pas pourquoi la somme d'un nombre pair de nombres consécutifs n'est pas multiple de ce nombre ? Et d'abord, est-ce qu'elle ne l'est jamais ? Je commence à me méfier, dans ce petit jeu où je me suis déjà trouvé plusieurs fois piégé.

Je reviens à mes schémas, en prenant comme exemple (Fig. 12)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Encore un exemple.

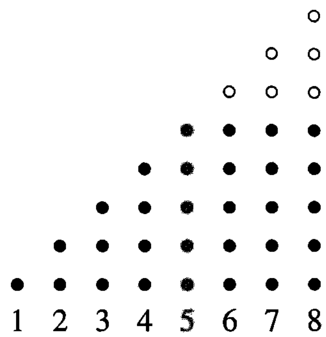

Fig.12

Que se passe-t-il maintenant ? Il n'y a plus de colonne centrale. Je regarde les 4 colonnes de droite : elles sont formées de 4 colonnes égales, surmontées d'un groupe de points que j'ai mis en blanc. Ce groupe de points est exactement ce qu'il faut pour compléter les 4 colonnes de gauche et en faire 4 colonnes égales. Cette manoeuvre donne la Fig. 13.

Nouveau recours à un raisonnement par symétrie ; puissance de l'intuition géométrique.

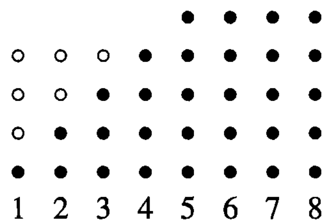

Fig.13

En regardant ce dernier schéma, je m'aperçois effectivement que *la somme d'un nombre pair de nombres consécutifs n'est pas un multiple de ce nombre*. Mais je vois aussi un résultat plus positif et que je n'attendais pas : *la somme d'un nombre pair de nombres consécutifs est multiple de la moitié de ce nombre*. Pas mal.

Découverte d'une propriété inattendue ; contentement.

5. Discussion avec les copains.

Là-dessus, j'ai encore dormi une bonne nuit, et le lendemain je n'avais plus aucune idée mirobolante. Difficile d'être tout le temps génial.

Mais j'ai expliqué mes trouvailles aux copains. Ils étaient contents, car ils n'avaient jamais pensé à tout ça.

Comme ils sont plus forts en math que moi, ils m'ont tout de suite fait des tas de réflexions. Je vais raconter ce qu'ils ont dit, car ce n'était pas mal non plus. Je crois que vous connaissez mes copains[1] : il y a Alceste, le gros qui mange tout le temps, Geoffroy qui a des lunettes, Rufus, Clotaire

On apprend beaucoup en bavardant et discutant avec d'autres.

[1] Cf. Sempé-Goscinny, *Le petit Nicolas et les copains*, Denoël, Paris, 1963

et Agnan, le chouchou de la maîtresse. Les autres n'étaient pas là.

Rufus a tout de suite fait de son nez avec l'algèbre. Il a dit que la somme de deux nombres consécutifs, c'est

$$n + (n + 1) = n + n + 1 = 2n + 1.$$

et qu'alors ça se voit tout de suite que c'est un nombre impair.

L'algèbre après la géométrie : tous les cas sont atteints puisque n est un nombre naturel *quelconque*.

EUDES. – Oui ben alors, si tu vas par là, la somme de 3 nombres consécutifs, c'est

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

et ça fait bien un multiple de 3.

L'algèbre sert à démontrer.

MAIXENT. – Moi je me souviens d'un truc que la maîtresse a dit pour la somme des n premiers nombres. Je fais un dessin comme Nicolas, en allant par exemple jusqu'à 7 (Fig. 14).

Retour à la géométrie.

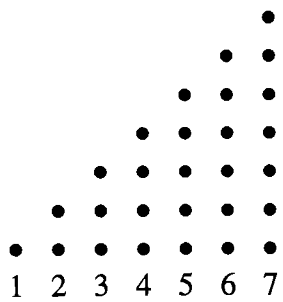

Fig.14

Puis je fais le même dessin une deuxième fois avec des points blancs, et je mets les deux dessins triangulaires ensemble pour faire un rectangle, comme sur la Fig. 15.

Penser *à côté* : avec un triangle, on ne voit rien, avec deux on fait un rectangle et le nombre de points d'un rectangle c'est facile.

L'idée-clé : tout le monde ne peut pas la trouver, mais chacun peut la faire sienne et s'en inspirer dans d'autres circonstances.

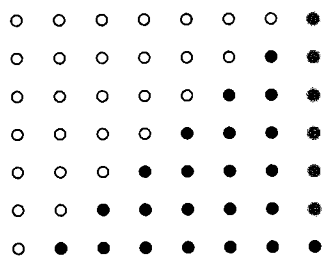

Fig.15

Ce rectangle fait 7 points sur 8, et donc il contient $7 \times 8 = 56$ points. Mais le triangle de départ contient la moitié moins de points, ce qui fait : $56/2 = 28$.

Et si j'avais n points au lieu de 7, j'aurais trouvé en tout

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ points.}$$

De l'exemple paradigmatique à la formule générale.

CLOTAIRE. – Pourquoi tu te fatigues à faire tous ces des-

Un raisonnement algébrique inspiré par la géométrie.

sins ? Tu peux écrire

$$1 + 2 + 3 + ... + n$$

et puis tu reproduis la somme à l'envers, ce qui donne au total

L'algèbre abrège le raisonnement

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & ... & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & ... & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

En additionnant les termes qui sont en dessous l'un de l'autre, on obtient partout $n + 1$. Donc la somme totale fait $n(n + 1)$ puisqu'il y a n termes. Et la somme cherchée fait la moitié moins, c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Oui mais alors avec ça, Maixent n'a toujours pas montré que si n est impair, le résultat $\frac{n(n+1)}{2}$ est multiple de n !

C'est pas compliqué, il a répondu Maixent. Si tu dis que n est impair, alors $n + 1$ est pair et $\frac{n+1}{2}$ est un nombre entier. Donc

Une déduction

$$n \cdot [\frac{n+1}{2}]$$

est multiple de n.

EUDES. – C'est pas vrai, Maixent il a faux, parce que $\frac{n+1}{2}$ est une fraction et pas un nombre entier !

Une erreur : les apparences sont trompeuses.

Répète ! il a dit Maixent, ou bien tu veux une baffe ?

La science est compatible avec la passion.

CLOTAIRE. – Vous tapez pas dessus les gars : l'autre truc est plus facile. Si n est pair, on a

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1),$$

et donc on a bien un multiple de $\frac{n}{2}$.

Alors Agnan – c'est le chouchou – il a dit que la maîtresse nous avait appris les progressions arithmétiques et tout ça, et que nous on avait oublié, et que ce que nous calculions c'était rien que des sommes de progressions arithmétiques, et que c'était encore plus facile comme ça parce qu'on avait la réponse toute faite.

Recours à une théorie acquise.

Mais quand même, nous on était bien content de tout ce qu'on avait fait, et on lui a dit taratata, et on est parti parce qu'on avait envie de jouer et qu'il y avait trop longtemps qu'on ne s'était plus battu.

6. Épilogue.

Revenons à notre question de départ : qu'est-ce que penser mathématiquement ? Pour y répondre, reparcourons les notes marginales de cet exposé. Est-ce que penser mathématiquement, ce n'est pas

a) donner libre cours à sa curiosité, explorer un champ de phénomènes (pas *un* phénomène), observer des régularités, des symétries, des *patterns*, des analogies, s'efforcer d'atteindre tous les cas, regarder les situations extrêmes, découvrir, se laisser surprendre ;

b) se convaincre inductivement à l'aide d'exemples, étayer sa conviction en cherchant davantage d'exemples, douter, argumenter son doute, chercher des contre-exemples, se tromper, infirmer, confirmer, réaliser que les exemples à eux seuls ne prouvent pas, se demander "est-ce que c'est toujours comme ça ?" (et "toujours" renvoie souvent à l'infini), éprouver le besoin d'une preuve, se demander "pourquoi est-ce comme ça ?"

c) énoncer, expliquer, prouver, chercher la figure paradigmatique (celle qui permet de "voir" tous les cas en nombre infini), raisonner sur une formule, particulariser, généraliser, repartir vers de nouvelles explorations ;

d) chercher des raccourcis de méthode (une économie de pensée), fouiller dans ses souvenirs, ne pas hésiter à penser à côté, s'approprier les idées lumineuses, se méfier des apparences et des jugements hâtifs, augmenter son expérience, sa méfiance critique, sa vigilance intellectuelle ;

e) éprouver la force des intuitions géométriques, la concision et la généralité des symboles, être content et parfois jubiler, éprouver le pouvoir de son esprit, augmenter sa confiance en soi ;

f) améliorer son hygiène intellectuelle, ne pas s'acharner quand ça ne va plus, aller dormir à temps, laisser mûrir une question.

Ouf ! Tout cela est touffu et serait en tous cas bien difficile à expliquer sans un exemple. On ne peut pas faire de la liste ci-dessus un répertoire de compétences qu'il faudrait acquérir une par une. Aucun exposé théorique ne peut faire voir ce qu'est la démarche, le joyeux remue-ménage de l'esprit en recherche. On apprend tout naturellement à faire des mathématiques en en faisant. Et il faut en faire soi-même pour apprendre à d'autres à en faire. C'est une condition nécessaire, quoique bien entendu insuffisante.

On peut croire par conséquent que la formation des enseignants de mathématiques de tous niveaux devrait comporter un volume assez important d'*activités* mathématiques.

Peut-être faut-il pour terminer répondre à une objection possible. Est-ce c'est bien de l'activité mathématique dont nous venons de parler, ou bien s'agissait-il seulement de balbutiements ? Donnons la parole à un homme qui savait de quoi il parlait, car il était non seulement un grand mathématicien, mais il avait en outre beaucoup réfléchi à ce qu'est l'activité mathématique. Jacques Hadamard écrit ceci : "Entre le travail d'un étudiant qui essaie de résoudre un problème de géométrie ou d'algèbre et un travail d'invention, on peut dire qu'il n'y a qu'une différence de degré, de niveau, les deux travaux étant d'une nature analogue."

Bibliographie

J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1975