PUBLICATION BIMESTRIELLE JANVIER/FÉVRIER 1990

BULLETIN

de la

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE BELGIQUE

(SÉRIE A)

Tome XLII

FASCICULE 1
Pages 1 à 226
1990

PUBLIÉ AVEC L'APPUI DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE

Bull. Soc. Math. Belg. — Tijdschr. Belg. Wisk. Gen. 42 (1990), 1, ser. A — 117

APPRENDRE A PROUVER

N. ROUCHE
Louvain-la-Neuve

La preuve est une composante de la pensée mathématique, composante importante, certes, mais non la seule puisque, pour constituer cette pensée, il faut aussi explorer et conjecturer. Mais on ne peut pas tout analyser à la fois, et c'est pourquoi les réflexions ci-après portent essentiellement sur la preuve. Le lecteur se souviendra cependant qu'elles ne prennent leur plein sens que reprises dans une vue globale de l'activité mathématique.

Nous essayerons de voir d'abord ce qui conduit des constats purs et simples, exprimés chacun par une proposition, aux chaînes plus ou moins longues d'arguments. Nous verrons ensuite que les preuves se distinguent selon que les arguments auxquels elles recourent sont immédiatement disponibles ou au contraire plus ou moins lointains, selon également qu'elles se laissent ou non subdiviser en cas de raisonnement (qui sont parfois des cas de figure). Puis nous examinerons comment le raisonnement provoque la transformation des notions quotidiennes en concepts formellement définis comme ceux dont usent les mathématiques constituées. Enfin, nous étudierons comment la nature des preuves change selon qu'elles s'inscrivent ou non dans un système explicitement conçu comme hypothético-déductif.

Autre distinction importante : celle qui considère les preuves selon leur caractère plus ou moins éclairant ou convainquant, c'est-à-dire selon qu'elles exhibent bien le pourquoi et le comment des choses, des phénomènes, ou, au contraire, qu'elles forcent l'adhésion de l'esprit par le pur constat de l'enchaînement déductif. Nous n'aborderons pas ce point de vue ici, car il est l'objet principal d'une intéressante étude d'E. Barbin [1] où on trouvera par ailleurs la problématique de la démonstration mise dans une large perspective historique.

Le présent article est un survol, par un enseignant, de quelques aspects de l'apprentissage de l'argumentation et de la preuve. Il est très loin d'épuiser la question. En particulier, il n'aborde pas l'apprentissage des diverses formes de démonstration : directe, par la contraposée, par l'absurde, etc. Il ne fait pas non plus le tour des études expérimentales sur le sujet. Pour aborder cet aspect des choses et prendre connaissance de la bibliographie récente, on pourra consulter N. Balacheff [2].

Une précaution terminologique : l'apprentissage de la démonstration passe par bien des étapes entre la simple preuve par évocation d'un argument empirique et la démonstration formalisée dans un cadre axiomatique. Nous avons pris le parti, pour simplifier, d'utiliser presque partout le terme *preuve*. On trouvera dans l'article cité de N. Balacheff des propositions de définition de *preuve* et *démonstration*.

Le présent texte sera développé et approfondi dans un exposé à venir, au Colloque inter-IREM d'Histoire et Epistémologie des Mathématique de Besançon (mai 1989). Il m'est agréable de mentionner ici tout ce qu'il doit à d'intéressantes conversations avec Ch. De Block-Docq, Ch. Hauchart et H. Masy.

1. CONCOMITANCES OU ENCHAÎNEMENTS

> Ces longues chaînes de raisons toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir ...
>
> Descartes

Examinons les trois propositions suivantes.

Proposition 1. *Tous les cercles ont la même forme, tous les carrés aussi.*

Proposition 2. *Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux.*

Proposition 3. *Les aires des carrés emboîtés de la Fig. 1 tendent vers 0.*

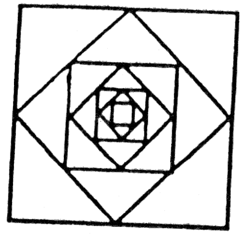

Fig. 1.

Les cercles et les carrés sont connus familièrement par les milliers d'exemples qu'en offre la vie quotidienne. Ils sont appréhendés comme des objets qui ont une forme donnée. Dire qu'ils ont la même forme est donc un constat qui fait partie de la conception que l'on en a : l'identité de forme adhère en quelque sorte à la notion de cercle, comme à celle de carré. N'est-il pas significatif d'ailleurs que le cercle, le carré, etc. sont appelés *formes* dans les ouvrages de géométrie élémentaire ?

Enfin, notons-le, le constat banal que tous les cercles ont la même forme est très loin de ses éventuelles interprétations mathématiques telles que : tout cercle étant le lieu des points équidistants d'un point donné, il en résulte que deux cercles quelconques sont semblables. Ceci n'est plus un constat, mais bien une proposition qui appelle une preuve discursive.

Les parallélogrammes sont appréhendés comme une classe de polygones ou, comme on vient de le rappeler, de formes. Cette classe est caractérisée mathématiquement soit par le parallélisme des côtés opposés, soit par l'égalité des angles opposés. Mais bien avant de démontrer l'équivalence de ces deux caractérisations, l'esprit les saisit comme propriétés concomitantes, inévitablement liées, de la forme en question : le parallélisme des côtés ne va jamais sans l'égalité des angles.

Quant à la Fig. 1, chaque carré y a une aire moitié de celle du carré précédent. Mais même sans prendre conscience de cela, on réalise à vue que la suite des aires s'approche rapidement et indéfiniment de zéro, le verbe *s'approcher* n'appelant aucune explication : il s'agit d'un simple constat.

Ainsi, les Propositions 1 à 3 expriment une *concomitance* de propriétés, une sorte de lien nécessaire et d'emblée perceptible, en quelque sorte constitutif des objets ou des situations considérées.

D. Van Hiele [3] s'est appuyée sur des concomitances de ce genre pour entamer la construction de la géométrie déductive chez des élèves d'une douzaine d'années. Elle a introduit les deux notions de *scie* et *d'échelle*, deux types de figures représentés respectivement par les Fig. 2 et 3. Elle dit, et les élèves la suivent : "on reconnaît une scie au parallélisme des segments ou a l'égalité des angles", et de même pour l'échelle. Il y a *concomitance* nécessaire des deux propriétés dans ces figures initialement appréhendées par la référence à des objets familiers : les vraies scies et les vraies échelles.

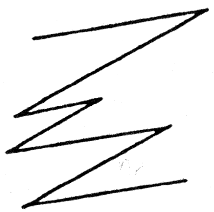

Fig. 2

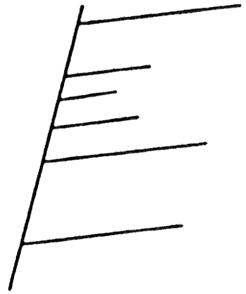

Fig. 3

D. Van Hiele n'amène pas ses élèves à démontrer l'équivalence mathématique des propriétés de parallélisme et d'égalité des angles. Elle appelle les scies et les échelles des *structures géométriques visuelles*. "A ce niveau", dit-elle, "un motif géométrique est encore interprété comme la totalité de ses propriétés. Les élèves ne sont pas encore capables de les différencier en définitions et propositions". Par contre, elle fait jouer la concomitance des propriétés comme argument dans des démonstrations ultérieures (cf. ci-après, Proposition 4).

Considérons maintenant les quatre propositions suivantes.

Proposition 4. *La somme des angles d'un triangle est un angle plat.*

<u>Preuve</u> : N'importe quel triangle pave le plan, comme une seule figure suffit à le montrer (Fig. 4). Or en chaque noeud du pavage se retrouve deux fois chacun des angles du triangle. ■

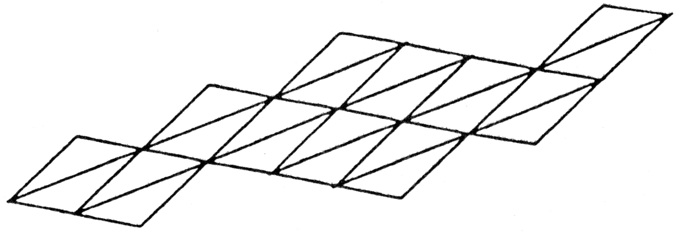

Fig. 4

<u>Autres preuves</u> : En ajoutant un trait à un triangle, comme sur la Fig. 5, on y discerne deux scies. Les trois angles du triangles sont rassemblés et forment un angle plat. De même, sur la Fig. 6, les deux traits ajoutés font apparaître une scie et une échelle. ■

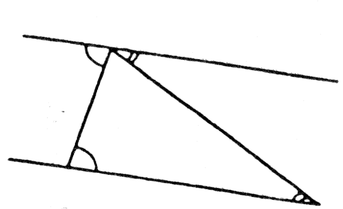

Fig. 5

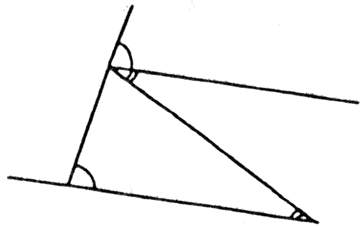

Fig. 6

Proposition 5. *La somme des angles d'un polygone convexe à* n *côtés vaut* $(n - 2)\pi$.

<u>Preuve</u> : On peut décomposer un polygone de ce genre en n-2 triangles, comme le montre la Fig. 7. Le résultat annoncé découle alors de la Proposition 4. ■

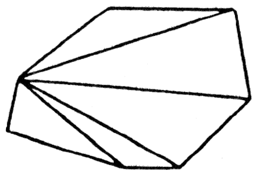

Fig. 7

Proposition 6. *On ne peut pas paver le plan avec des polygones réguliers isométriques dont le nombre de côtés est plus grand ou égal à 7.*

<u>Preuve</u> : On observe que 3 hexagones rassemblés autour d'un point occupent les 360° autour de ce point (Fig. 8). On sait par ailleurs que l'angle des polygones réguliers croît avec leur nombre de côtés : les polygones superposés à la Fig. 9 suffisent à le montrer. Puisque, par ailleurs, en un noeud d'un pavage polygonal régulier se trouvent au moins trois polygones, à partir de l'heptagone la somme des 3 angles qu'on essaye de rassembler autour d'un noeud dépasse 360° (Fig. 10). ■

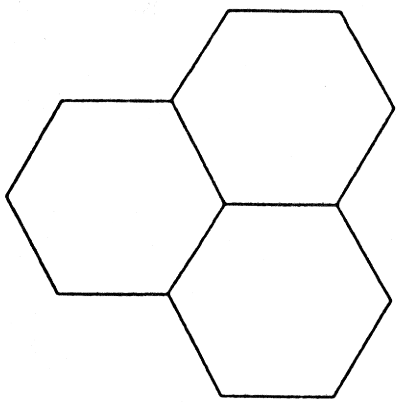

Fig. 8

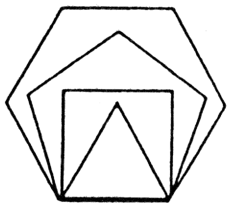

Fig. 9

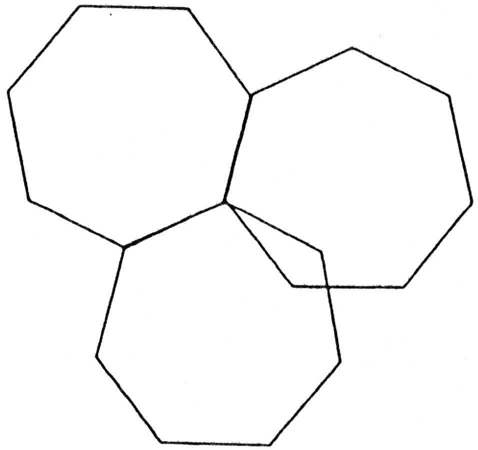

Fig. 10

Proposition 7. *Tout quadrilatère convexe pave le plan.*

<u>Preuve</u> : Soit (Fig. 11(a)) un quadrilatère quelconque dont les angles sont marqués de 1 à 4. Accolons-lui un deuxième quadrilatère obtenu par rotation d'un demi-tour autour du milieu du côté (4, 1), ce qui donne la Fig. 11(b). Faisons tourner le quadrilatère ainsi obtenu autour du milieu de son côté (4, 3), ce qui conduit à la Fig. 11(c). Enfin, faisons tourner le dernier quadrilatère obtenu, toujours d'un demi-tour, autour du milieu de son côté (3,2), ce qui donne la Fig. 11(d). Les angles 1, 2, 3 et 4 sont ainsi rassemblés autour d'un point et s'y ajustent exactement, puisqu'en vertu de la Proposition 5, la somme des angles du quadrilatère vaut 360°. La Fig. 11(d) considérée globalement montre un octogone dont les côtés sont deux à deux isométriques et parallèles, en vertu de la façon dont ils ont été obtenus. Cette figure reproduite par translation peut donc recouvrir tout le plan, comme l'indique la Fig. 12. ■

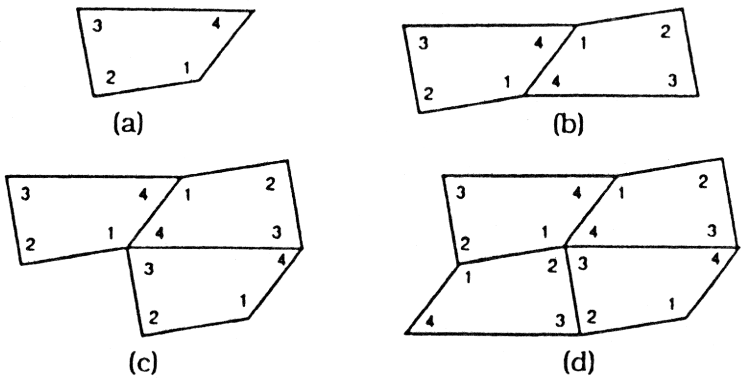

Fig. 11

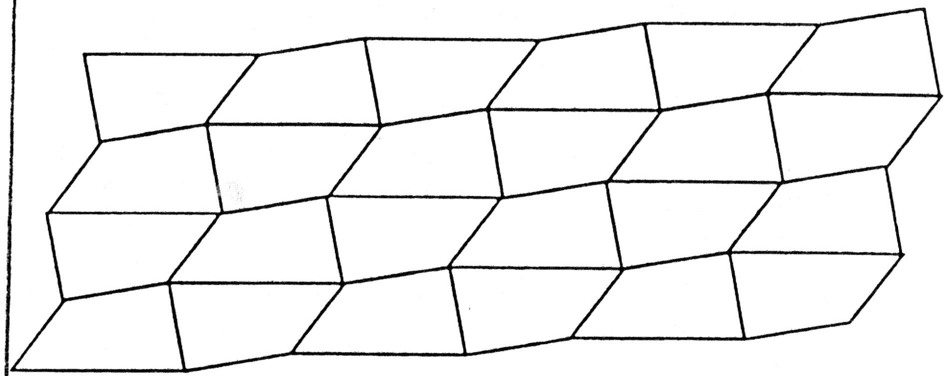

Fig. 12

Les Propositions 1 à 3 sont des sortes de constats sur des situations données. Elles n'ont pas a priori un statut d'implication. On n'y discerne pas à première vue des hypothèses et une thèse. Chacune énonce un fait, et ce fait est saisi comme vrai. Comparons-les aux Propositions 4 à 7. Celles-ci n'apparaissent sans doute pas beaucoup plus que les premières comme des implications. On les perçoit aussi comme des énoncés de faits. Mais ici, ces faits ne sont plus évidents. La preuve les amène à l'évidence à l'aide d'un enchaînement d'arguments. L'existence d'un tel enchaînement n'amène pas à isoler et expliciter les hypothèses : celles-ci jouent de manière plutôt implicite. Elles vont de soi, elles adhèrent à la situation proposée par l'énoncé. La preuve procédant par un enchaînement, parfois long, d'arguments, on peut dire que la pensée y

devient discursive, au sens habituel de ce mot : "Une opération de pensée est dite *discursive* quand elle atteint le but où elle tend par une série d'opérations partielles intermédiaires." (A. Lalande [4]).

La pensée discursive rencontrée dans les preuves ci-dessus est proche de la pensée commune. On pourrait dire de la Proposition 7 qu'elle est amenée à l'évidence par la *preuve du carreleur*. Celle-ci est loin de la pensée discursive hypothético-déductive, comme nous le verrons au n° 5.

2. ARGUMENTS A PORTEE OU LOINTAINS

Il suffisait d'y penser !

Colomb

Réexaminons la preuve de la Proposition 6. Les arguments qui y sont invoqués sont pour ainsi dire *à portée*. Les deux premiers sont suggérés par l'énoncé : on vérifie empiriquement que l'hexagone régulier pave, et que trois heptagones réguliers rassemblés autour d'un point ont un recouvrement. Ces deux manœuvres amènent les Fig. 8 et 10. Lorsqu'on s'interroge ensuite sur la possibilité de paver avec des octogones, des ennéagones, etc., on débouche tout naturellement sur la croissance de l'angle des polygones réguliers avec leur nombre de côtés. Constater cette croissance résulte d'une manœuvre qui s'impose, à savoir la superposition des angles, que ce soit selon la disposition de la Fig. 9 ou autrement.

La proposition suivante est un autre exemple où les arguments sont quasiment disponibles sur le chantier de la preuve.

Proposition 8. *Le tétraèdre régulier n'a que deux patrons, ceux donnés par la* Fig. 13.

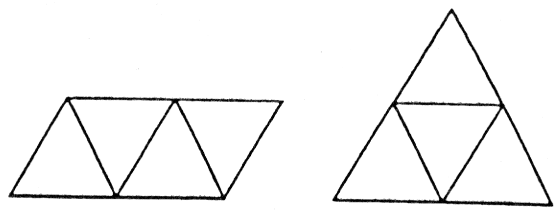

Fig. 13

Preuve : On ne peut accoler deux triangles équilatéraux isométriques que d'une seule façon (à isométrie près, mais cette restriction peut demeurer implicite) : cf. Fig. 14(a). On ne peut de même accoler trois triangles équilatéraux que d'une seule façon (cf. Fig. 14(b)), ce qui se constate en adjoignant un triangle successivement aux quatre côtés du losange de la Fig. 14(a). A la Fig. 14(b), on peut adjoindre un nouveau triangle de trois façons, ce qui donne la Fig. 13 et la Fig. 15. On vérifie par pliage (réel ou en imagination) que la Fig. 13 donne bien, de deux façons, le tétraèdre et que la Fig. 15 ne le donne pas. ■

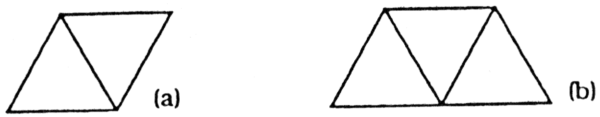

Fig. 14

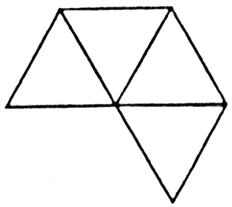

Fig. 15

Dans cette preuve, on manie, comme annoncé, des objets et des arguments à portée : il ne faut pas aller les chercher bien loin. C'est plutôt le contraire qui se passe pour les Propositions 4 et 5. Lorsqu'il est question dans l'énoncé, de la somme des angles d'un triangle, on est a priori loin de penser à entourer le triangle par d'autres triangles isométriques pour former un pavage. Et de même, comme le prouve l'expérience dans les classes, on ne pense pas spontanément à trianguler un polygone pour évaluer la somme de ses angles.

Voici un autre exemple de preuve dans laquelle l'argument-clé est lointain, au sens où il faut aller le chercher profondément dans l'imagination.

Proposition 9. *La somme des* n *premiers nombres naturels vaut* n (n + 1) / 2.

Preuve : Il nous suffira de considérer l'exemple typique de n = 5. La somme des 5 premiers naturels est le "nombre triangulaire" de la Fig. 16(a). En accolant deux copies de ce nombre triangulaire, on obtient le "nombre rectangulaire" 5 (5 + 1), comme le montre la Fig. 16(b). Donc la somme des 5 premiers naturels vaut 5 (5 + 1) / 2. ■

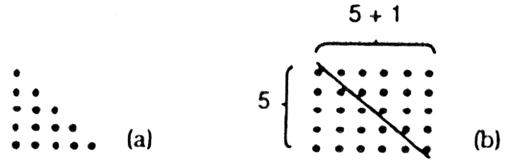

Fig. 16

Autre preuve : Désignons par S la somme cherchée, et écrivons-la de deux façons :

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n,$$
$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

En sommant ces deux équations terme à terme, nous obtenons

$$2\,S = n(n + 1),$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

La première preuve remonte aux Pythagoriciens. La deuxième est en quelque sorte une traduction algébrique de la première. La légende veut que Gauss écolier ait utilisé ce procédé de calcul pour se débarrasser rapidement d'un pensum imposé par son instituteur : calculer la somme des 100 premiers nombres. Et précisément, cette légende illustre la manœuvre d'un esprit astucieux : l'argument n'était pas à portée, il fallait y penser ...

Les exemples de preuves évoqués jusqu'ici ne sont ni assez nombreux ni assez variés pour fonder les considérations suivantes, mais sans doute suffisent-ils à les suggérer et à les rendre plausibles. Il est fréquent que pour construire une preuve, il faille aller chercher des arguments assez loin. D'où la nécessité, pour celui qui cherche, d'abord de disposer d'une mémoire bien nourrie de faits et d'idées en relation avec la question posée, et ensuite de mobiliser ceux-ci et de les confronter pour voir de quelles combinaisons fructueuses ils sont porteurs. Poincaré [5] a écrit là-dessus des choses qu'il faut lire ou relire : il compare les pensées utiles en puissance à des molécules que le chercheur met en route pour les faire circuler en tous sens, comme celles d'un gaz en théorie cinétique : elles s'entrechoquent de multiples façons, dans la pensée consciente ou subconsciente, et finissent par produire des combinaisons fructueuses.

Ainsi, on ne peut apprendre à démontrer que sur un champ de connaissances et de phénomènes assez *touffu* et *cohérent* . Pour poursuivre un instant la métaphore de Poincaré, les molécules d'un gaz raréfié ne se rencontrent pas assez souvent, et qui plus est, des molécules hétéroclites n'ont pas de propension à s'associer. Apprendre à démontrer en géométrie n'est pas la même chose qu'apprendre à démontrer en analyse ou en arithmétique. Les objets et les manœuvres ne sont pas les mêmes d'un domaine à l'autre, même s'il y a un important fond commun qui appartient aux mathématiques en général et des connexions significatives entre domaines.

En outre et enfin, un argument est à portée ou lointain selon la familiarité du chercheur avec la matière de sa recherche. Ce qui, rencontré pour la première fois, apparaît comme une astuce ou un trait de génie, passera dans le savoir familier : la pensée retrouve les sentiers cachés avec d'autant plus d'aisance qu'elle les a empruntés quelques fois (et qu'elle les a tracés elle-même ... mais il va de soi que personne ne peut tout inventer ou réinventer).

3. CAS DE FIGURE OU DE RAISONNEMENT

> ... diviser chacune des difficultés que j'examinais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les résoudre.
> ... faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.
>
> Descartes

Considérons les deux propositions suivantes :

Proposition 10. *Certains pentagones pavent le plan.*

<u>Preuve</u> : Voir la Fig. 17.

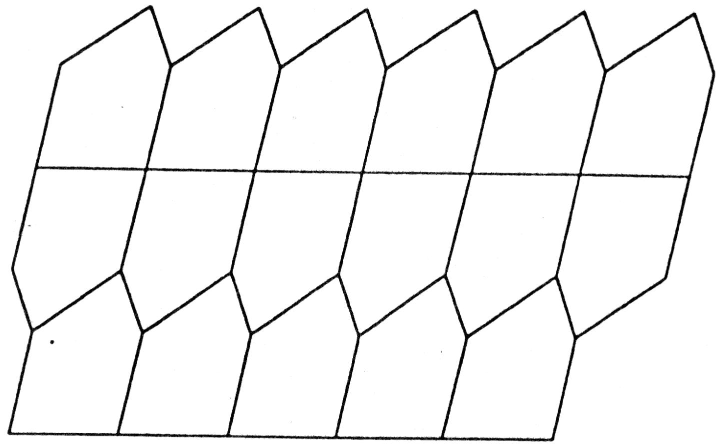

Fig. 17

Proposition 11. *Pour que deux polygones aient la même forme, il ne suffit pas que leurs côtés soient proportionnels.*

<u>Preuve</u> : Voir la Fig. 18, où on a pris le rapport entre côtés égal à 2.

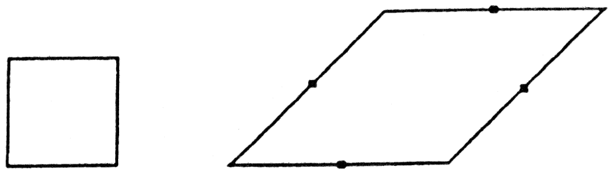

Fig. 18

La preuve de la Proposition 10 consiste à exhiber un exemple. Celle de la Proposition 11 n'est rien d'autre qu'un contre-exemple à la proposition : *deux polygones qui ont leurs côtés proportionnels ont la même forme*. Dans les deux cas, il s'agit d'une preuve constructive d'une proposition à quantificateur existentiel. Le degré de conviction qu'elles apportent est fort : comment douter d'un objet simple que l'on a sous les yeux ? On affirme l'existence d'une chose : la voilà ! L'esprit n'a pas à s'égarer dans une foule de cas auxquels seule l'imagination donne accès.

La situation est analogue à celle que K. Popper [6] évoque sous le nom d'infirmation (ou de "falsification") d'une loi physique (supposée) par une expérience. La prégnance, la clarté d'une expérience bien conduite emportent la conviction. Une exception dûment constatée suffit à infirmer une loi, puisqu'une loi, par définition, ne souffre pas d'exception.

La situation est différente pour les théorèmes quantifiés universellement, ou plus précisément ceux qui portent sur plusieurs cas, et même le plus souvent sur une infinité.

Soit par exemple la proposition suivante.

Proposition 12. *La médiatrice d'un segment* (c'est-à-dire la droite perpendiculaire au segment en son milieu) *est le lieu des points équidistants de ses extrémités.*

<u>Preuve</u> : La Fig. 19 illustre la situation, et la propriété annoncée résulte clairement de sa symétrie. ■

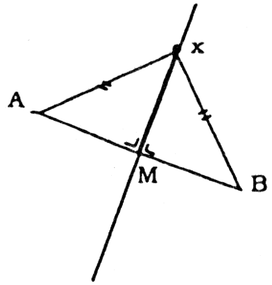

Fig. 19

<u>Autre preuve</u> : Soit X un point de la médiatrice. On a AM = MB, d'où $AM^2 + MX^2 = BM^2 + BX^2$, et grâce au théorème de Pythagore, AX = XB. Soit ensuite X un point à égale distance de A et B, et M le pied de la perpendiculaire abaissée de X sur AB. On a AX = XB par hypothèse, et donc $AX^2 - XM^2 = BX^2 - XM^2$, et donc AM = MB, grâce au théorème de Pythagore. ■

La Proposition 12 porte sur une infinité non dénombrable de points : tous ceux de la médiatrice. Mais tous les cas possibles sont ordonnés de telle sorte qu'en en voyant un, on a le sentiment fort de les imaginer tous.

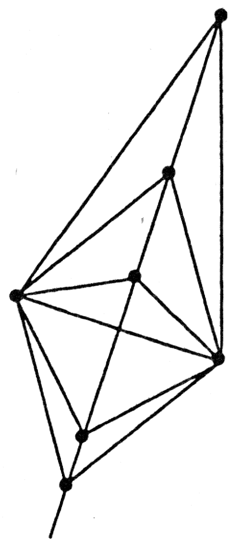

Fig. 20

Quelques-uns de ces points sont présentés à la Fig. 20. La première preuve ne tient qu'a cette conviction que l'on a de saisir toutes les figures possibles dans une unique intuition. Et même le fait qu'il faille imaginer des segments AB de toutes les longueurs possibles n'affaiblit pas la conviction. Le simple argument de symétrie est une sorte d'induction infinie (c'est-à-dire portant sur un ensemble infini) à vue.

On observe une induction analogue dans la démonstration de la Proposition 5. Celle-ci porte sur tous les polygones convexes, avec un nombre quelconque n de côtés : induction double donc, d'abord non dénombrable sur tous les polygones ayant un nombre de côtés donnés, puis dénombrable sur le nombre de côtés. L'hypothèse de convexité (dont on pourrait par ailleurs se passer) canalise l'imagination et permet ici aussi de rassembler tous les cas possibles dans une intuition unique, simple et rassurante. A défaut de cette hypothèse, le nombre et la complexité des polygones à imaginer deviennent tels que l'imagination s'y perd, ce qui oblige à plus de circonspection dans le raisonnement.

De même la Proposition 7 (tout quadrilatère convexe pave le plan) porte sur des emboîtements de figures dont la variété décourage l'imagination. Soit dit en passant, on pourrait aussi y faire l'économie de l'hypothèse de convexité, ce qui élargirait encore le champ des figures possibles. On ne voit pas comment, dans ce fouillis, discerner des ensembles de cas qui, par leur parenté, soulageraient l'intuition. Reste donc à raisonner prudemment, en s'appuyant sur les propriétés des isométries plutôt que sur la vue directe des choses.

L'exemple suivant suffira à rappeler que lorsqu'une proposition porte sur une infinité de cas, il arrive que ceux-ci se divisent en sous-ensembles plus facilement maîtrisés par l'intuition ou le raisonnement que l'ensemble initial.

Proposition 13. *Si un angle droit projeté orthogonalement sur un plan a pour image un angle droit , un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection.* .

Preuve : Montrons que si aucun des deux côtés de l'angle droit donné n'est parallèle au plan de projection, alors l'image de l'angle n'est

pas un angle droit. Par hypothèse, les deux côtés de l'angle droit donné (ou leurs prolongements) percent le plan de projection.

Supposons d'abord que ce soient les deux côtés (et non leurs prolongements). Considérons que le plan du dessin (Fig. 21 (a)) est le plan de projection et soient A et B les deux points de percée. Rabattons l'angle droit donné autour de AB comme charnière, ce qui donne par exemple $A\hat{C}B$. Si on remonte $A\hat{C}B$ autour de AB comme charnière, il occupe toutes les positions intermédiaires possibles, du type de $A\hat{X}B$, entre $A\hat{C}B$ et $A\hat{C'}B$. Tous les angles $A\hat{X}B$ sont obtus. L'un deux est la projection de l'angle donné.

Si un des côtés de l'angle donné et le prolongement de l'autre percent le plan de projection, la situation est celle de la Fig. 21 (b) et la projection de l'angle donné est un angle aigu. Si ce sont les deux prolongements qui percent le plan, la projection est à nouveau un angle obtus (Fig. 21 (c)). ■

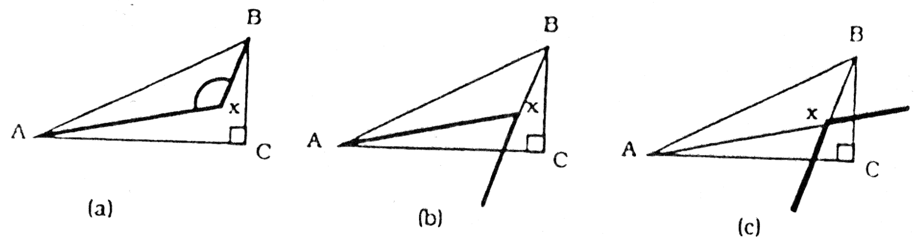

Fig. 21

Chacun des trois dessins de la Fig. 21 suffit à donner une intuition sûre de l'infinité non dénombrable de figures qu'il représente.

Bien entendu, il arrive aussi, particulièrement quand on sort du cadre de la géométrie, qu'il faille parler de cas de raisonnement plutôt que de cas de figure. Et il arrive aussi que des cas de raisonnement (ou de figure) ne se prêtent pas à une intuition simple, mais requièrent un traitement discursif.

4. DES NOTIONS AUX CONCEPTS

> Naive conjectures and naive concepts are superseded by improved conjectures (theorems) and concepts (proof-generated or theoretical concepts) growing out of the method of proofs and refutations.
>
> I. Lakatos

Le lecteur aura remarqué sans doute que les exemples de preuves présentés jusqu'ici mobilisent plutôt des *notions* (des *objets mentaux* au sens de H. Freudenthal [7]) que des *concepts* au sens habituel en mathématiques, et des relations plutôt intuitives que formelles. Nous nous sommes appuyés sur les emboîtements de figures et les propriétés d'additivité correspondantes pour les aires et les angles, sur des inégalités d'angles établies par superposition, sur le fait qu'un demi-tour change une droite en une droite parallèle, sur la conservation des distances dans une symétrie orthogonale, sur des mouvements continus de figures entre deux positions. Les deux exemples suivants contribueront à montrer davantage encore la variété des ressources que la pensée mathématique à ses débuts puise dans un monde perceptif et mental très proche du quotidien.

<u>Nouvelle preuve de la Proposition 5</u> : (La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $(n - 2)\pi$. Soit le polygone de la Fig. 22, avec ses côtés prolongés comme indiqué. En promenant une demi droite sur le pourtour du polygone au départ du point A et en la faisant tourner en chaque sommet, successivement des angles correspondants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$, on revient au point A après avoir fait un tour complet. Or les α_i sont les suppléments des angles du polygone. La somme de ces derniers vaut donc $n.\pi - 2\pi$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans cette preuve (commentée par le psychologue de la forme M. Wertheimer [8]), on compose à vue des rotations, ou, en d'autres termes, on somme des angles "qui ont perdu leur sommet".

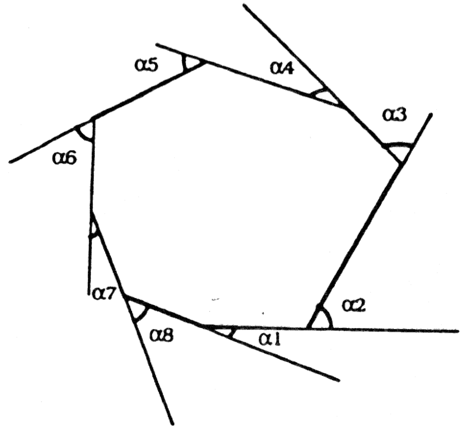

Fig. 22

Proposition 14. $\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \dots = \frac{1}{2}$.

<u>Preuve</u> : On coupe une bande de longueur 1 en trois parties égales, puis la partie du milieu en trois parties égales, et on continue de même (Fig. 23). La série proposée est représentée par l'ensemble des segments à gauche du milieu du segment de départ. On trouve une autre copie de la série à droite de ce point milieu. ■

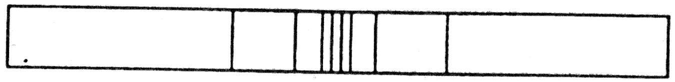

Fig. 23

Cet exemple n'est pas isolé : il n'est pas rare que l'on puisse obtenir la somme d'une série à vue, sur un dessin.

Il n'est pas étonnant que nombre de résultats obtenus à un tel niveau non formel, presque quotidien, relèvent de la géométrie, puisque les figures sont une source majeure d'intuition. Ce n'est pas par hasard non plus que notre exemple d'arithmétique (Proposition 9) et les exemples analogues relatifs aux nombres figurés de Pythagore aient un ancrage dans la géométrie. Il en va de même pour nos deux exemples de limite d'une suite (Proposition 3) et d'une série (Proposition 14).

Mais il arrive un moment où l'intuition s'obscurcit, s'embarrasse dans des doutes, provoque des contradictions. C'est alors qu'il faut théoriser, substituer aux notions familières des concepts mathématiquement conçus pour déjouer les pièges et les paradoxes de l'intuition. La mathématique décolle alors du quotidien. En voici quelques exemples.

Proposition 15. *Toutes les paraboles ont la même forme.*

Preuve : Toute parabole est le lieu des points équidistants d'un point (son foyer) et d'une droite (sa directrice). Or deux figures constituées chacune d'un point et d'une droite (ne passant pas par le point) sont semblables : l'une est le dessin de l'autre à une autre échelle. Il semble donc bien que toute parabole se déduit de n'importe quelle autre par un changement d'échelle.

Deuxième preuve : Toutes les paraboles sont données à isométrie près par la courbe d'équation $y = ax^2$, dessinée en axes rectangulaires, avec $0 < a < \infty$. Considérons une parabole quelconque et la parabole d'équation $y = x^2$ (cf. Fig. 24). La droite $y = \alpha x$, où α est un réel quelconque, coupe la première parabole au point$\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\alpha^2}{a}\right)$ et la seconde au point (α, α^2). On constate que l'application

$$(\alpha, \alpha^2) \to \frac{1}{a}(\alpha, \alpha^2)$$

est une homothétie. D'où la thèse. ■

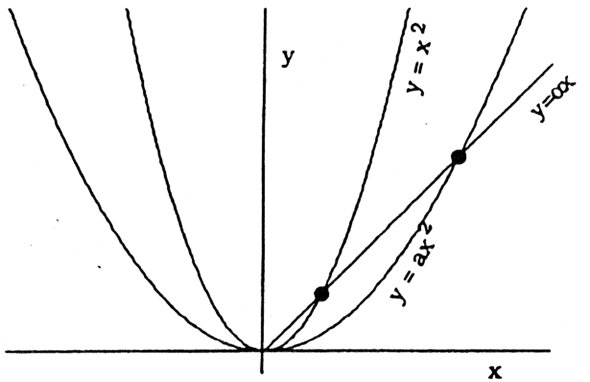

Fig. 24

La thèse de la Proposition 15 ne saute pas aux yeux. On peut voir à cela deux raisons. D'une part les paraboles sont des courbes lisses et d'une seule venue, sans parties reconnaissables dans un agrandissement (au rebours des polygones) et avec une symétrie plus faible que celle du cercle ou même de l'ellipse. D'autre part, les paraboles étant non bornées, lorsqu'on en dessine deux, il arrive le plus souvent que le dessin montre une partie beaucoup plus "notable" de l'une que de l'autre, cf. Fig. 25. La similitude serait plus plausible sur une présentation telle que celle de la Fig. 26.

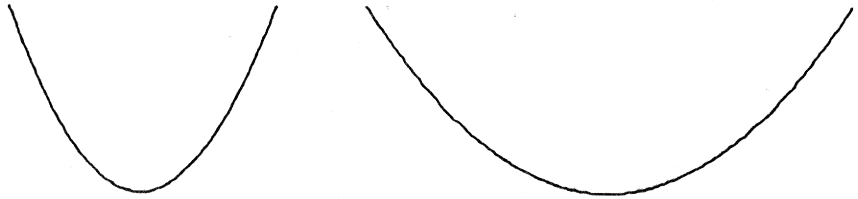

Fig. 25

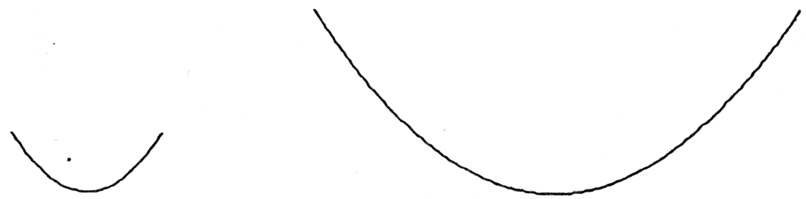

Fig. 26

Ainsi l'intuition est mise en défaut. La première preuve, qui par ailleurs demanderait sans doute à être quelque peu explicitée pour devenir totalement convainquante, s'appuie nécessairement sur une définition technique particulière de la parabole. La deuxième preuve repose sur les équations des paraboles et sur la caractérisation analytique des homothéties, ce qui est une façon savante d'interpréter la locution "de même forme".

Proposition 16. *On considère un polygone régulier à un million de côtés (un million-gone) et d'aire égale à* 1. *On en considère un second construit en joignant les milieux des côtés successifs du premier. Puis un troisième construit de même dans le second, et ainsi de suite. Les aires de ces millions-gones tendent vers* 0.

Preuve : Tous ces million-gones sont semblables. Soit α le rapport de similitude de chacun d'eux (à partir du deuxième) au précédent. On a $0 < \alpha < 1$ (et α très proche de 1). La suite des aires en question est $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ Il faut montrer qu'à partir d'un certain n, α^n devient plus petit que toute quantité $\varepsilon > 0$ donnée, si petite soit-elle :

$$\alpha^n < \varepsilon.$$

Or, montrer cela revient à montrer que :

$$\frac{1}{\alpha^n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais $1/\alpha$ est plus grand que 1. On peut donc écrire $1/\alpha = 1 + \delta$ pour un certain $\delta > 0$. Il faut donc montrer qu'à partir d'un certain n

$$(1 + \delta)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or,

$$(1 + \delta)^n > 1 + n\,\delta,$$

ce qui résulte soit du développement binomial, soit d'une preuve simple par récurrence. Il suffit donc de montrer qu'à partir d'un certain n

$$1 + n\,\delta > \frac{1}{\varepsilon}.$$

On considère ceci soit comme évident, soit comme découlant de l'Axiome d'Archimède. ■

La décroissance des million-gones est tellement lente que beaucoup de personnes doutent de la limite nulle suggérée. Dans le cas analogue des carrés emboîtés (cf. Proposition 3 et Fig. 1), non seulement la limite nulle de la suite des aires ne fait pas de doute, mais la notion même de limite n'appelle aucune explication, aucune définition technique : les aires s'approchent indéfiniment de zéro, cela se voit. Tout au contraire, pour prouver la limite nulle des aires des million-gones, il a fallu montrer que ces aires devenaient plus petites que n'importe quelle quantité donnée, c'est-à-dire qu'il a fallu prouver une inégalité. Où pouvait-on aller chercher celle-ci ? Certainement pas dans la notion intuitive, non technique, de limite nulle. Il a fallu élaborer (jusqu'à un certain point), le

concept de limite en termes d'inégalités (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n, etc.) pour qu'il se prête à la conduite technique de la preuve. Le concept de limite a commencé à prendre forme sur ce chantier de preuve.

Proposition 17. *Tout déplacement plan est une translation ou une rotation.*

Preuve : Soit un déplacement plan et A un point du plan ayant A' pour image. Si A = A', le point A est fixe et le déplacement est une rotation. Si A' ≠ A, considérons un deuxième point E = A', et soit E' son image. Puisqu'un déplacement conserve les distances, on a d(A', E') = d(A, E). Le point E' est donc sur le cercle de centre A' et de rayon d(A, E). S'il se trouve comme sur la Fig. 27(a), le déplacement est une translation décrite par le couple (A, A'). S'il se trouve comme sur la Fig. 27(b), le déplacement est un demi-tour autour du milieu de AA'. Si E' se trouve en n'importe quel autre point du cercle, les médiatrices de AA' et EE' se rencontrent et le déplacement est une rotation autour de leur point de rencontre comme centre (Fig. 27(c)). ■

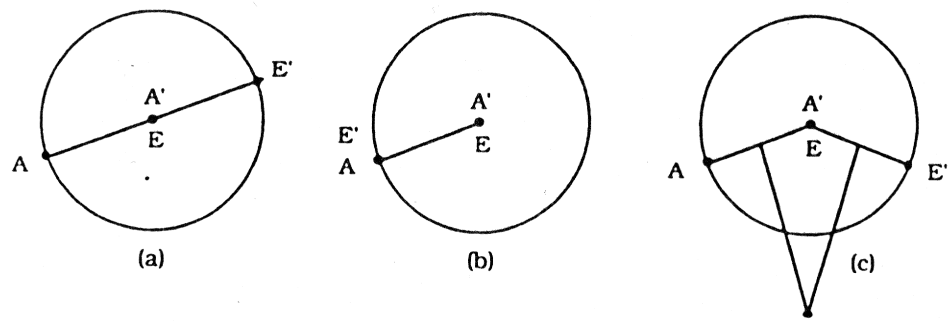

Fig. 27

Le lecteur se sera souvenu, en lisant cette démonstration, que tout déplacement est déterminé par la donnée de deux points et de leurs images. Supposons que la première idée que l'on ait d'un déplacement concerne les figures bornées. Un telle vue des choses est la plus naturelle. Elle est directement issue des manœuvres de la vie quotidienne consistant à déplacer des objets. Il n'y a vraiment aucune raison *a priori* d'imaginer des déplacements mobilisant tous les points de l'espace (ou du plan s'il s'agit du plan).

Mais la preuve ci-dessus donne un rôle clé à l'astuce qui consiste à choisir comme second point E à déplacer le point qui coïncide avec l'image A' du premier. Or si on imagine le déplacement comme portant sur une figure bornée, on ne peut être sûr que l'image d'un point A donné se trouve sur la figure de départ. La démonstration n'est donc pas possible, en toute généralité, si on ne définit pas le déplacement comme affectant tous les points de l'espace. La notion familière de déplacement est donc modifiée ici, *pour les besoins de la preuve.* Elle s'écarte du quotidien pour devenir un concept "de mathématicien", un instrument techniquement adapté à la construction d'un raisonnement (et de beaucoup d'autres qui suivront pour former une théorie).

I. Lakatos [9] appelle "proof-generated concepts" les concepts ainsi constitués pour s'adapter aux exigences des démonstrations. Il a montré sur plusieurs exemples (entre autres ceux de *polyèdre* et de *convergence uniforme*) l'importance historique de ce mode de création ou d'ajustement des concepts. Il a insisté aussi sur le fait que les mathématiques exposées déductivement comme dans la plupart des traités ont perdu le souvenir des moments cruciaux de leur genèse, ces moments où les définitions, les concepts et les preuves s'ajustent les uns aux autres à travers des contradictions et des reprises de la pensée. Dans les traités en effet, les définitions apparaissent souvent dans leur limpide sécheresse bien avant les endroits où l'on peut saisir pourquoi on les a choisies telles, quels pièges de la pensée elles sont supposées déjouer, de quels mécanismes de démonstration elles sont la clé.

Revenons maintenant aux élèves qui apprennent à démontrer. Il leur arrive souvent, au moment de tenter une démonstration, de ne pas posséder les concepts qu'elle requiert, soit qu'ils ne les aient pas encore rencontrés, soit, plus souvent, qu'ils ne les aient pas bien assimilés. Ils se trouvent ainsi dans la situation d'avoir eux aussi à ajuster les uns aux autres les concepts, l'énoncé et la preuve. Cette situation n'est nullement regrettable. Elle est au contraire fructueuse, puisque les élèves y trouve l'occasion de reconnaître les raisons d'être des outils conceptuels, d'éprouver leur efficacité dans les difficultés du chantier. On perçoit aussi tout l'artifice qu'il y a, pour un professeur qui veut enseigner la démonstration, à vouloir à tout prix s'assurer que les élèves disposent

préalablement des outils conceptuels nécessaires, surtout si ce préalable précède de trop longtemps l'ouverture des chantiers de preuve. La conceptualisation prématurée suscite la question commune et légitime : "à quoi ça sert ?" En rapprochant la construction des concepts des preuves où ils servent (c'est-à-dire en faisant un enseignement *heuristique* , selon l'expression de Lakatos), on répond à cette question moins évasivement que par l'habituel "tu verras plus tard".

5. L'HYPOTHETICO-DEDUCTIF

Si Paris était mis en bouteille ...

Supposition populaire.

Comme nous l'avons observé au n° 1, certaines propositions mathématiques parmi celles que rencontrent les débutants sont de simples constats. Mais ceux-ci sont sûrs ou ne le sont pas. Certains sont des inductions hâtives ou fausses. Les élèves qui s'en contentent n'éprouvent pas le besoin de prouver. Une manœuvre possible est alors de les amener à enregistrer soigneusement leurs convictions, avant de leur poser des questions nouvelles exhibant des contradictions.

Le jour vient alors, tôt ou tard, où l'élève énonce une proposition dont il doute. Pour fixer les idées, supposons cette proposition vraie. Elle résiste à la construction de quelques contre-exemples, et ceci peut fort bien suffire, parfois, à ce que certains se persuadent de sa vérité. Mais supposons que ce ne soit pas le cas de tous, et que donc les opinions soient partagées. Le projet est enfin formé de chercher une preuve. Nous ne nous demandons pas ici d'où vient cette initiative. Tout ce que nous souhaitons commenter, c'est la difficulté du projet.

Pour entreprendre de prouver une proposition douteuse, il faut tout de même, fut-ce pour un temps, la supposer vraie, car sinon pourquoi se fatiguer ? Mais bien qu'on la suppose vraie, il faut tout de même la tenir à distance, car si on s'en servait dans la preuve (ce qui peut arriver par inadvertance), on commettrait une faute logique. On ne peut s'appuyer, pour construire la preuve, que sur des propositions acquises. D'où une nécessaire séparation de la thèse et des hypothèses. Ces dernières sont les points d'appui de la preuve, tandis que la thèse est cette chose que l'on imagine vraie et vers laquelle on tend, dont on s'inspire même pour y arriver, mais à laquelle on refuse de recourir dans la construction de la preuve. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce point, pourtant majeur, car nous en avons traité abondamment ailleurs [10].

Outre cette difficulté de soutenir la thèse tout en la tenant à distance, divers incidents de l'apprentissage peuvent amener à remettre en question le statut des hypothèses.

Considérons par exemple la proposition suivante, souvent rencontrée par ceux qui cherchent des pavages du plan utilisant des polygones réguliers de plusieurs sortes.

Proposition 18. *La somme des angles d'un pentagone, un hexagone et un octogone tous trois réguliers égale* 360°.

<u>Preuve empirique</u> : Je dispose les trois angles en question autour d'un point et constate le résultat annoncé (Fig. 28). ■

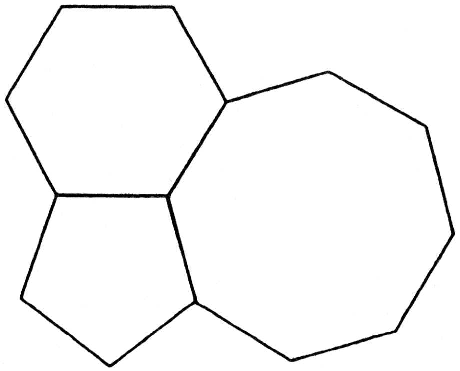

Fig. 28

<u>Preuve du contraire</u> : Grâce à la Proposition 5, on calcule que les angles des polygones mentionnés valent respectivement 540/5 = 108°, 720/6 = 120° et 1080/8 = 135°. Leur somme vaut 363°. ■

Il faut résoudre cette contradiction entre l'expérience et la théorie. Mais d'où vient "la théorie" ? De la Proposition 5, elle-même dérivée de la Proposition 4 : la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Or si cette dernière vient elle-même du constat expérimental qu'illustre la Fig. 4 (tout triangle pave le plan) alors il faut choisir entre croire au pavage de la Fig. 4 ou à celui de la Fig. 28.

En refaisant cette dernière avec beaucoup de soin, on s'aperçoit qu'elle conduit à un petit recouvrement des polygones. On décidera donc d'accepter la Proposition 4 et de rejeter la Proposition 28 (la Proposition 4 équivaut à l'Axiome des parallèles). Mais un doute peut naître : "Et si la Fig. 4 n'était elle-même pas tout à fait exacte ?" Ce doute peut contribuer à faire discerner les statuts respectifs des propositions physiques et mathématiques, en particulier en donnant à ces derniers la forme hypothético-déductive. On dira : "Si les triangles de la Fig. 4 sont supposés s'ajuster exactement, alors ...".

L'anecdote suivante montre que le choix entre deux propositions contradictoires ne s'impose pas toujours. Un professeur [11] propose à ses élèves un triangle rectangle isocèle, fait l'hypothèse qu'une commune mesure va m fois dans un côté de l'angle droit et n fois dans l'hypoténuse, en tire l'équation

$$2m^2 = n^2$$

par le théorème de Pythagore et en déduit une contradiction par le raisonnement classique sur la parité et l'imparité des deux membres. Elle tente d'amener la conclusion : "Ainsi, vous voyez, ce que nous avons admis au départ ne pouvait être vrai." "Donc", répond un élève, "le théorème de Pythagore est faux !" On imagine en effet sans peine que le théorèmé de Pythagore apparaisse moins évident que l'existence de la commune mesure (dont tant de personnes sont persuadées).

C'est donc parfois de telles contradictions qui imposent un choix de points de départ théoriques. Un certain arbitraire des hypothèses les rend difficiles à soutenir pour elles-mêmes. Elles cessent d'être des propositions dont la vérité est établie une fois pour toutes, pour devenir ce qui suit le *si* dans une phrase du type *si* ... *alors* .... N'étant plus reçues pour leur évidence, elles doivent être *assumées* par celui qui a pour projet de démontrer qu'elles impliquent une certaine autre chose. Le verbe *assumer* utilisé par Piaget [12] dans ces circonstances joint avec bonheur à son sens français de *prendre en charge*, la connotation qui lui vient de son parent anglais *to assume*, qui veut dire *supposer*.

voir p. 147

Soulignons que le projet de démontrer une implication plutôt que d'établir "une vérité" n'est pas de ceux qu'on peut aborder sans une forte motivation. Il faudrait pouvoir s'attarder davantage sur cette difficulté qui tient à l'idée la plus profonde de ce que sont les mathématiques.

C'est dans cette ligne de pensée qu'on trouve, tout à la fin, les structures axiomatiques. Leur construction fixe l'attention au moins autant sur les implications que sur les faits, ce qui amène à la nécessité de prouver des évidences. On sait que c'est là une autre difficulté de l'apprentissage de la démonstration. On ne prouve une évidence que si on s'intéresse, non à l'évidence, mais à son implication par quelque hypothèse, ce qui ne peut être le projet d'un débutant.

Puis, un fois qu'une structure axiomatique est acquise, vient le rôle qu'elle joue, globalement, dans les démonstrations. Sans doute est-ce là l'étape *la plus avancée* de l'apprentissage de la démonstration : lorsqu'on connaît familièrement une structure, l'identifier dans un paysage mathématique donné (en établissant que ses axiomes y sont satisfaits) et en déduire immédiatement des propriétés du paysage. On se gardera de confondre cela avec l'activité *prématurée* souvent proposée naguère dans les classes : reconnaître une structure dans une situation qui l'illustre, pour n'en conclure rien d'autre que l'existence de cette illustration.

6. CONCLUSION

Si les points principaux de l'exposé qui s'achève ici méritent quelque attention, c'est moins sans doute en raison de leur originalité que de ce qu'ils sont parfois — et pour certains souvent — négligés dans l'enseignement. Reprenons-les en guise de conclusion.

La pensée discursive, c'est-à-dire celle qui procède par enchaînement de raisons, peut être pratiquée bien avant le stade des mathématiques formalisées et symbolisées. Les preuves qu'elle produit, bien qu'appuyées sur des arguments empiriques, peuvent déjà posséder certains caractères des démonstrations plus formelles et donc préparer à celles-ci. En effet, elles sont parfois longues (n° 1), exigeant donc un projet ferme et une attention soutenue ; elles recourent parfois à des arguments lointains ou inattendus (n° 2), ne pouvant ainsi être construites

que dans un contexte assez riche en sources d'argument et favorisant l'imagination, la mobilité de l'esprit ; elles exigent parfois le traitement successif d'un certain nombre de cas de figure ou de raisonnements (n° 3), s'appuyant par conséquent sur l'esprit de système et le soin à ne rien omettre.

L'apprentissage de la démonstration ne va pas sans celui de la conceptualisation, dans la mesure où les concepts recoivent leur forme mathématiquement élaborée pour servir d'instruments dans les preuves (n° 4). Il s'en suit qu'apprendre à prouver n'est pas un apprentissage à part, mais s'identifie à l'acquisition même des mathématiques et de leur tissu conceptuel.

Vient enfin le passage de l'activité déductive à l'hypothético-déductive (n° 5), aboutissant à déplacer l'attention de la thèse vers l'implication, obligeant à "prouver des évidences" dans le cadre des constructions axiomatiques. Il s'agit là d'un véritable changement de paradigme qui ne peut résulter que d'un long apprentissage.

Dernière observation, et probablement la plus importante : ce n'est pas parce que les premières constructions de la pensée discursive s'appuient, *entre autres*, sur des arguments empiriques, qu'elles relèvent d'une intuition vague et d'une logique indécise. On ne peut ignorer, dans ces constructions, les exigences de la logique ordinaire : les implications doivent y être correctes, on ne peut se servir de la thèse comme d'une hypothèse, on ne peut se méprendre sur le sens de la contraposée (cf. Prop. 13), etc., etc. Ce dernier point, qui est celui de la rigueur dans les mathématiques "commençantes" sera développé davantage dans l'exposé annoncé ci-dessus pour le colloque de Besançon.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BARBIN, *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques,* IREM de Nantes (section du Mans), 1988 ; à paraître dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

[2] N. BALACHEFF, *Preuve et démonstration en mathématiques au collège* , Rech. en Didactique des Math., 3 (1982), 261-304.

[3] D. VAN HIELE, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.,* Thèse de doctorat, Utrecht, 1957.

[4] A. LALANDE, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie,* Presses Univ. de France, Paris, 1951 ; p. 238.

[5] H. POINCARE, *Science et méthode,* Flammarion, Paris, 1947 ; p. 60.

[6] K.R. POPPER, *La logique de la découverte scientifique,* Payot, Paris, 1982.

[7] H. FREUDENTHAL, *Didactical phenomenology of mathematical structures,* Reidel, Dordrecht, 1983.

[8] M. WERTHEIMER, *Productive thinking,* Harper and Brothers, New York, 1943.

[9] I. LAKATOS, *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique,* trad. N. Balacheff et J.-M. Lalande, Hermann, Paris, 1984.

[10] C. HAUCHART, N. ROUCHE, *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse,* GEM et CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987.

[11] L'anecdote est de Fr. Thomas-Van Dieren, professeur à Bruxelles.

[12] J. PIAGET, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant,* Delachaux et Niestlé, Paris, 1978.

p. 147

* Piaget évoque la situation où à jeunes enfants on demande: "Supposons que les chiens aient 6 pattes. Combien de pattes y-aura-t-il dans une cour où il y a 5 chiens?". Piaget affirme que les jeunes enfants sont incapables de répondre, parce qu'ils ne peuvent tout simplement pas "assumer" l'hypothèse.