Nicolas Rouche 1994 - Manuscrit d'un article en néerlandais paru dans Uitwiskeling 10 n° 1

Les nombres ne sont pas dans la nature

Mettre ceci en italique et en rouge ?

Il m'est bien agréable d'écrire quelques pages pour le numéro anniversaire des dix ans de Uitwiskeling. Comme beaucoup d'autres assurément, j'apprécie la qualité de cette petite revue, la pertinence de ses rubriques, et la richesse des matériaux qu'elle a fournis, au fil des années, aux enseignants de mathématiques. C'est pourquoi je lui souhaite longue vie et prospérité. Mais ce souhait a aussi un côté égoïste : tant que la courageuse équipe de Uitwiskeling demeurera sur la brèche, le Groupe d'Enseignement Mathématique de Louvain-la-Neuve pourra compter sur des alliés, qui sont aussi des amis. Et cette amitié est largement réciproque.

Il y a quelques années, Bernard Charlot a publié en France et en parallèle en Belgique un article[1] dans lequel il distinguait trois conceptions possibles des mathématiques. Il les appelait, à la suite de J.T. Desanti, les mathématiques du Ciel, les mathématiques de la Terre, et les mathématiques comme instruments. Qu'on nous permette de commencer par une assez longue citation qui explique de quoi il s'agit.

en gras

"1) Les mathématiques du Ciel [...] Il y a des idées mathématiques et elles ont une existence en soi ; elles préexistent à toute saisie par le mathématicien. Ce sont des idées pures, transparentes, évidentes, qui s'articulent pour constituer un monde mathématique structuré. Le mathématicien ne fait qu'explorer ce monde, dont l'existence ne dépend pas de son activité. [...] Dans cette perspective, l'enseignant

doit présenter le monde mathématique dans le cours de mathématiques et former l'esprit de l'élève à l'abstraction. Cette conception épistémologique des mathématiques est la base de l'enseignement traditionnel, qui procède par des cours, suivis d'exercices d'application.

en gras

"2) Les mathématiques de la Terre. Il n'y a pas d'êtres mathématiques autonomes. Les mathématiques ne sont que la structure du monde naturel, et, peut-être, du monde social. Lorsqu'il fait des mathématiques, le mathématicien ne se réfère donc pas à des entités indépendantes et abstraites. C'est lui au contraire qui abstrait du monde la structure idéale de ce monde, structure qui est de type mathématique. Les mathématiques existent toujours quelque part, mais comme structures et non comme idées indépendantes, et dans l'immanence, et non plus dans la transcendance. Cette conception épistémologique des mathématiques est à la base de cette pédagogie nouvelle qui prétend faire découvrir les mathématiques à l'enfant par la simple manipulation du concret. Si les mathématiques sont dans les choses, celles-ci finiront par révéler leurs secrets mathématiques si on les manipule longuement."

en gras

"3) Les mathématiques comme instruments. Le monde mathématique ne pré-existe ni dans le Ciel ni sur la Terre. L'activité mathématique n'est pas découverte, mais création. Les mathématiques sont créées, historiquement et dans des conditions sociales déterminées, par l'activité du mathématicien. L'activité mathématique, comme le montre J. T. Desanti, est indissolublement création d'activités opératoires et création corrélative d'un champ d'opérations."

Ces trois vues possibles des mathématiques sont clairement contradictoires. Elles sont intéressantes et il est utile de les connaître et de les discuter, puisque chacune vaut, pour l'essentiel, une manière d'enseigner. A ce titre, elles sont socialement importantes.

Peut-on par ailleurs dire que l'une des trois est vraie? Qu'elle est la bonne? Probablement que non, dans la mesure où elles sont des manières de voir, des opinions, et non des faits ou des théorèmes. Néanmoins, on peut les argumenter. Et des opinions argumentées sont plus utiles, aident davantage à réfléchir que des opinions non argumentées.

L'objet de la présente note est d'argumenter contre les mathématiques de la Terre. Nous nous restreindrons à l'exemple des nombres et tenterons de montrer que ceux-ci "ne sont pas dans les choses", qu'ils n'expriment pas "la structure idéale" ne serait-ce que d'une partie, ou d'un aspect du monde. On ne <u>découvrira</u> jamais les nombres, <u>tels qu'ils sont dans les mathématiques</u>, même en manipulant longuement beaucoup d'objets bien choisis.

Passons donc au détail des choses. Mais d'abord une remarque: pour montrer que le système entier des nombres réels ne se retrouve pas comme tel dans la nature, il suffit de montrer qu'une partie importante d'entre eux ne s'y trouve pas. Nous nous occuperons ci-après essentiellement des rationnels, positifs d'abord, puis positifs et négatifs. Les naturels se trouvent peut-être bien, eux, dans la nature, comme leur nom semble l'indiquer. Et quant aux irrationnels, ils posent des problèmes spécifiques, et d'ailleurs en général mieux connus, que nous n'aurons pas le loisir d'aborder dans cette courte note.

Partons donc naïvement, à la recherche des rationnels positifs dans la nature. La première chose que nous rencontrons, ce sont des fractions, et d'abord des fractions de grandeurs. A l'école primaire, les grandeurs sont souvent des tartes. On trouve une demi-tarte, trois cinquièmes de tarte, cinq quarts de tarte. Bien sûr, pour avoir un modèle des rationnels, il faut passer à des classes d'équivalence de parties de tartes. Ce n'est pas difficile. Et nous n'avons même pas vraiment facilement sur l'équivalence de trois cinquièmes et de trois cent cinq-centièmes de tarte (ce qui ferait de la bouillie dans l'assiette). Parce que ce n'est pas là une chose très importante. Observons au contraire, avec optimisme, que les fractions de grandeurs (ce sont des objets) se prêtent à sommation et à comparaison (relation d'ordre) comme les rationnels. Il y a un isomorphisme sans défaut pour la somme et l'ordre entre les rationnels positifs et les fractions de grandeurs.

Mais pour avoir un modèle des rationnels positifs, il faut aussi disposer d'une multiplication, opération binaire <u>interne</u>. Et là c'est l'impasse. On ne voit pas comment multiplier deux parties de tartes pour obtenir une partie de tarte. Et cela ne sert à rien de changer de domaine de grandeur. Il n'y a pas de produit de deux objets pesant qui donne un objet pesant, ni de deux intervalles de temps qui donne un intervalle de temps. On peut concevoir un produit de deux objets allongés (deux baguettes) qui donne une étendue superficielle, un rectangle.

Mais ce n'est pas là une opération interne. On est forcé de conclure : il n'y a pas de produit de grandeurs qui donne une grandeur.

Alors cherchons le produit ailleurs. Considérons non plus des grandeurs, mais des opérations sur des grandeurs. On trouve un modèle du produit dans la composition d'opérations de ce type : prendre les deux-cinquièmes des quatre tiers d'une grandeur donne un modèle fidèle, à tous points de vue, du produit des fractions et des rationnels. Le malheur veut qu'entretemps on a perdu la somme. Certes, on peut, avec beaucoup d'artifice, définir une somme pour les opérateurs. Mais Félix Klein remarquait déjà que cette définition est fort peu naturelle. On serait, en particulier, bien mal avisé de s'en servir dans l'enseignement, alors que du côté des grandeurs on dispose pour la somme d'un modèle si simple et si suggestif. Constatons donc que nous n'avons pas jusqu'ici trouvé dans la nature de modèle très satisfaisant pour les rationnels positifs.

Passons donc aux rationnels en général, c'est-à-dire en prenant en compte les rationnels négatifs. En ce qui concerne la somme, le modèle des grandeurs s'écroule. Comme l'ont constaté bien des auteurs au cours des siècles, une grandeur plus petite que zéro, c'est-à-dire plus petite que rien est une notion absolument dépourvue de sens. Changeons donc de modèle et considérons l'ensemble des mouvements dans les deux sens sur une droite : on avance de tant, on recule de tant... ça suppose que ce sont on avance ou recule soient des fractions

de l'unité). On a aussi le modèle des avoirs et des dettes, ou, ce qui n'est pas tout à fait la même chose, des mouvements de fonds sur un compte en banque. Tout va bien ; nous avons là un modèle parfait pour l'addition.

Occupons-nous ensuite de l'ordre. Lorsque nous ne regardions que les rationnels positifs, l'ordre sur les grandeurs était un bon modèle, nous l'avons dit. Les adjectifs grand et petit conservaient leur sens de la langue commune. Avec l'arrivée des négatifs, ce modèle est aussi ébranlé. Dans le modèle des mouvements, un ample mouvement vers la gauche est plus "petit" que un "petit" mouvement vers la droite. De même, une dette de 100 francs est plus petite qu'une dette de 1 franc. Ou alors faut-il dire les choses autrement ? Un avoir de −100 francs est plus petit qu'un avoir de −1 franc. Mais c'est là un langage bizarre.

Toutefois, nous ne sommes pas au bout de nos peines, et ce n'est pas pour rien que les nombres négatifs ont donné tant de fil à retordre à l'humanité au fil des siècles. Cherchons un modèle pour la multiplication des rationnels. Les opérateurs de fractionnement des grandeurs ne peuvent pas devenir négatifs, à cause de la nature même des grandeurs. On ne peut pas prélever −2/3 d'une tarte. Regardons alors du côté des mouvements ou des avoirs et dettes. Comment voulez-vous, observait le jeune Stendhal[3]

quand il était au collège à Grenoble, qu'en multipliant une dette de 2.000 francs par une dette de 3.000 francs, j'obtiens une fortune de 6 millions ? Et donc ici aussi, ce qui marchait pour la somme ne fonctionne plus pour le produit. Il faut donc pour ce dernier chercher un modèle ailleurs. On trouve alors que la composition des homothéties (de rapports rationnels) donne une bonne image du produit des rationnels. Mais le prix payé est lourd : on a cassé la somme.

Conclusion : nous n'avons pas trouvé les rationnels dans la nature. Est-ce qu'en cherchant mieux, on les y trouverait ? Libre à chacun d'essayer. Mais il est tout de même impressionnant de penser que les instituteurs et professeurs de mathématiques essayent depuis des siècles.

Alors n'est-il pas plus raisonnable de se dire que les rationnels sont une construction humaine (ou un don de Dieu, mais là l'argumentation sera plus délicate ...), mais qu'ils ne font en tous cas pas partie des mathématiques de la Terre.

Faut-il par ailleurs regretter que les nombres ne s'accordent pas exactement à l'ensemble des phénomènes naturels ou sociaux qu'ils ont cependant pour vocation de modéliser ? Faut-il, avec Platon et Aristote, se dire que la nature bassement matérielle, le monde d'ici bas, est imparfait et fonctionne médiocrement, tandis que les mathématiques seraient la réalité idéale, celle qui fonctionne de façon harmonieuse ? Ou au contraire se dire que la nature présente des aspects divers, qu'elle est en tous cas moins simple qu'on ne le croyait, mais qu'il ne sert à rien

de la critique. Elle fonctionne bien dans chacune de ses structures particulières : les grandeurs, la composition des fractionnements, les mouvements sur une droite, les avoirs et les dettes, les aires des rectangles, les compositions d'homothéties... Que de richesses et de questions passionnantes cachées dans tout cela !

Mais alors, est-ce que le champ des rationnels est une armure rigide, ou une camisole de force, ou un vêtement mal coupé que l'on voudrait faire endosser à la nature ? Faut-il recommencer les mathématiques autrement pour qu'elles traduisent plus fidèlement les phénomènes naturels ? Ou au contraire est-ce que le système des nombres est un remarquable outil à têtes multiples qu'il faut apprendre à utiliser convenablement selon les circonstances : embrayer la tête "additive positive" sur les grandeurs, la tête "multiplicative positive" sur les opérations de fractionnement, la tête "additive positive et négative" sur les avoirs et les dettes, la tête "multiplicative positive et négative" sur les compositions d'homothéties, etc, etc. (car les applications des nombres sont innombrables) ?

Et qu'est-ce qu'un professeur de mathématiques peut penser de tout cela ? La première chose sans doute, c'est qu'il doit partir des enfants et de leur univers familier pour construire avec eux, par étapes, le bel outil à têtes multiples, qui donne un si remarquable pouvoir intellectuel. Ensuite qu'il ne peut pas faire croire aux élèves que les mathématiques s'ajustent d'elles-mêmes à la réalité : essayer de faire croire cela, c'est déboussoler les enfants, puisque c'est une contre-vérité, et qu'ils buteront sans cesse sur des contre-exemples.

Ensuite, et mieux vaut le savoir, c'est qu'il y a un seuil important, une distance difficile à franchir, entre la réalité et les mathématiques. Et qu'en construisant les mathématiques avec une classe, il ne faut jamais oublier la réalité. Si on l'oublie, alors les élèves se divisent en deux catégories : ceux qui ont l'esprit sain et pratique et qui refusent de manier l'outil à tête multiple quand on le fait tourner à vide (ce sont les indociles et ils sont en grand danger d'échec scolaire) ; ceux qui ont l'esprit sain, mais qui sont dociles, et aussi peut-être qui sont fascinés par les beaux outils, par les idées pures. Ces derniers sont bien adaptés au système scolaire. Ils apprennent sans doute beaucoup de mathématiques. Mais avec celles-ci, ils ne savent pas faire beaucoup d'autres choses que des mathématiques. Beaucoup de nos étudiants de licence sont de cette catégorie (intelligente) là. Et s'ils deviennent professeurs de mathématiques ... ?

Notes.

[1] Cet article a été repris dans un livre : il constitue le Chapitre VII de R. Bkouche, B. Charlot, H. Rouche, Faire des mathématiques : le plaisir du sens, A. Colin, Paris, 1991.

[2] F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Vol. 1, Springer, Berlin, 1908 ; 4e éd. 1933.

[3] Stendhal, Vie de Henry Brulard, rééd. Gallimard, Paris, 1973.