LES IDEES QU'ON SE FAIT DES MATHEMATIQUES

Inventaire à compléter

par
N. Rouche

> Il était jeune, assez bien fait,
> assez gai, quoique mathématicien.
> Fontenelle.

On a rassemblé ci-après, en les entrecoupant de commentaires critiques, un certain nombre de vues, d'opinions, d'idées reçues, de lieux communs sur les mathématiques. On n'a pas jugé utile de les attribuer explicitement chacun à des acteurs sociaux déterminés : mathématiciens, enseignants, élèves, hommes de la rue, techniciens, etc. Mais une telle attribution découle clairement du contexte, et le lecteur n'y verra pas de difficulté.

Cet inventaire, à coup sûr incomplet, a été conçu comme un outil de travail pour chercher des réponses aux questions suivantes : *si ce sont là les idées qu'on se fait des mathématiques, d'où viennent-elles ? Qu'est-ce qu'elles provoquent ? Et que faut-il faire ?*

1. LES FRONTIERES DES MATHEMATIQUES AU COURS DES SIECLES.

Pour connaître le domaine qu'a recouvert le terme *mathématiques* dans la langue commune au fil des âges, le plus simple est de consulter des dictionnaires. L'évolution depuis le XVII^{e} siècle est étonnante.

Voici la définition de Furetière (1694) : "Science qui s'attache à connoître les quantitez et les proportions. La quantité continuë est l'objet de la Geometrie, de la Trigonometrie, des Spheriques, des Sections Coniques, de l'Algebre specieuse. La quantité discrete est l'objet de l'Arithmetique, de l'Algebre commune. Les proportions sont l'objet de la Musique, de l'Architecture, de la Perspective. L'Optique, la Catoptrique, et la Dioptrique sont aussi partie de Mathematiques, parcequ'elles connoissent les causes de la vision directe, de la reflexion, et de la refraction par ses angles. L'Astronomie et le Gnomonique, parcequ'elles mesurent la hauteur et la grandeur des Astres, les angles et les ombres que font leurs raïons; et enfin les Mechaniques, parcequ'elles examinent toutes les forces mouvantes par les angles, et les longueurs des leviers, coins, roües, et autres principes des machines. C'est pourquoi on se sert le plus souvent de ce mot au plurier, parceque toutes ses parties sont enchaînées ensemble."

Littré (1878) est beaucoup plus bref. Il définit la mathématique comme "Science qui a pour objet les nombres, les figures et les mouvements."

Pour Robert (1963), les mathématiques sont "l'ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité et l'ordre." Il mentionne aussi les grandeurs mesurables et le mouvement, mais à part, et sous la dénomination curieuse de "mathématiques concrètes".

On discerne l'évolution d'une définition à l'autre : les mathématiques se constituent de plus en plus comme science autonome abstraite, à l'écart des objets du monde sensible qui ont alimenté leur croissance séculaire.

2. NATURE ET CARACTERES DES MATHEMATIQUES; COMMENT ON LES VOIT.

2.1. "<u>Les mathématiques, c'est calculer</u>." Pour l'homme de la rue, faire des mathématiques c'est calculer, mâcher, ruminer des nombres et des symboles cabalistiques. Un mathématicien qui se trompe dans une addition suscite des commentaires ironiques. Il se défend en détrompant son public : les mathématiques ne se définissent même pas comme la science du quantitatif. Une partie importante des mathématiques est qualitative. Faire des mathématiques, c'est penser et non calculer. La plupart des mathématiciens, mais non tous, considèrent les calculs comme une tâche fastidieuse et développent des trésors d'ingéniosité pour les abréger.

2.2. Les mathématiques sont exactes; la rigueur. Selon l'opinion commune, il n'y a pas de place pour le doute en mathématiques : "c'est oui ou non, blanc ou noir, vrai ou faux. Deux plus deux, ça fera toujours quatre et pas autre chose."

La rigueur implacable des mathématiques sert de métaphore. L'adjectif *mathématique* signifie (entre autres) : "Absolument certain, nécessaire, inévitable" (Robert, 1963). On dit de quelqu'un : "Il doit réussir, c'est mathématique." (ibid.)

Pourtant la rigueur n'existe et ne se pratique que suivant des registres variés. "Il y a des paliers de rigueur" écrit H. Freudenthal (1973). La rigueur a valeur instrumentale : on y recourt, on en augmente la dose, lorsqu'on est en danger de se tromper. La rigueur n'est pas de même niveau dans le travail du logicien et celui de l'analyste. La rigueur absolue est un concept limite. La rigueur n'est pas l'essentiel des mathématiques. L'essentiel, ce sont les idées. Comme a dit quelqu'un, la rigueur c'est l'hygiène du mathématicien.

Il est vrai pourtant que les mathématiques sont une science exacte, et qu'une proposition, dans un cadre axiomatique fixé, est vraie ou fausse dès qu'elle n'est pas absurde ou ... indécidable. Du moins est-ce ce qu'on peut raisonnablement penser, car il semble hors de question d'en être absolument sûr. Dans un traité qui, de son propre aveu, "vise à la rigueur parfaite", N. Bourbaki (1966) écrit : "[...] nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que

sur l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité."

2.3. "Les mathématiques sont arbitraires." Les mathématiques d'aujourd'hui ont, pour l'essentiel, la forme axiomatique. Or le choix d'un système d'axiomes est tout à fait libre : il ne doit satisfaire qu'à l'unique condition d'être non contradictoire. L'absence de contradiction suffit à rendre possible la construction d'une théorie.

Néanmoins, les mathématiciens n'étudient pas n'importe quels systèmes d'axiomes : ils ne s'intéressent qu'à ceux avec l'aide desquels ils ont l'espoir de résoudre des problèmes qu'ils se posent. Ceux-ci peuvent appartenir aux mathématiques elles-mêmes ou au champ de leurs applications. Les mathématiciens disent - non sans mépris - de ceux d'entre eux qui par exception se mettent à étudier des axiomatiques gratuites, qu'ils pratiquent des "soft mathematics", des mathématiques molles.

2.4. "Les mathématiques n'étudient aucune chose, elles n'étudient que des relations." D. Hilbert, créateur principal du concept moderne de système axiomatique, a dit en parlant de sa reconstruction de la géométrie euclidienne : "On doit pouvoir, dans cette théorie, remplacer *point*, *droite* et *plan* par *table*, *chaise* et *canette de bière* sans que son sens en soit affecté." Dans cette optique, seule compte la structure, et les termes primitifs de la théorie ne renvoient à rien. C'est ce qui a fait dire à B. Russell : "Les mathématiques sont une science où on ne sait pas de quoi on parle", et il ajoutait "et où on ne sait pas si ce qu'on en dit est vrai." (Sur ce dernier point, cf. le n° 2.5).

Vues sous cet angle, les mathématiques sont bien distinctes des autres sciences, dont il est clair que chacun s'occupe de choses bien réelles : les phénomènes électriques, les molécules, les crises économiques, ... Mais d'un autre côté, les mathématiciens s'occupent aussi de choses qui dans leur esprit et dans leurs livres ont beaucoup de relief. C'est le même Hilbert qui a écrit, avec D. Cohn-Vossen (1932), un ouvrage intitulé *La géométrie et l'imagination*, truffé de dessins d'objets divers : surfaces, réseaux, polyèdres, ...

2.5. "Les mathématiques sont une activité déductive." Ce qui n'est pas vrai. L'exposé d'une théorie mathématique est déductif. L'activité mathématique n'est pas une activité principalement déductive, même pas une activité purement rationnelle, même pas une activité ordonnée. Chercher la solution d'un problème, c'est tendre vers la production de rationnel et de déductif à travers l'obscurité et le désordre des choses irrésolues.

M. Kline (1977) écrit dans l'avant-propos d'un manuel de calcul différentiel et intégral : "... amener les étudiants à maîtriser une organisation déductive polie ne leur apprend pas comment penser ou faire des mathématiques, car penser ou faire ne sont pas des processus déductifs. [...] l'approche rigoureuse est trompeuse. Parce qu'un cours d'introduction au calcul différentiel et intégral constitue le premier contact de l'étudiant avec les mathématiques supérieures, il en retire l'impression que les mathématiques vraies sont déductives et que les bons mathématiciens pensent déductivement."

Mais c'est le destin de chaque grande théorie mathématique d'aboutir, au terme d'une construction controversée et tumultueuse, à la forme impeccablement déductive des traités. Toute affirmation y est de la forme "si ..., alors ..." et le *si* renvoie à la boutade de Russell : le conditionnel exprime l'incertitude. "On ne sait pas si ce qu'on dit est vrai."

2.6. "Les mathématiques sont un langage." Cette opinion est ancienne puisque Galilée écrivait déjà en 1623 : "La philosophie

naturelle est écrite dans ce grand livre toujours ouvert sous nos yeux - je veux dire l'univers - mais nous ne pouvons pas le comprendre si nous n'apprenons pas d'abord la langue et ne saisissons pas les symboles dans lesquels il est écrit. Ce livre est écrit dans la langue mathématique, et ses symboles sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques, sans l'aide desquels il est impossible d'en comprendre un seul mot; sans lesquels on erre en vain dans un sombre labyrinthe."

Langue géométrique donc, pour Galilée. Et c'est un fait que la géométrie euclidienne était encore, à son époque, le centre des mathématiques et le modèle de la rigueur. Les choses ont évolué depuis. En particulier le courant structuraliste des mathématiques du XX^{e} siècle a emprunté le chemin d'une algébrisation quasi-généralisée. Même s'ils s'appuyent sur beaucoup d'intuition - et c'est pratiquement toujours le cas - les résultats mathématiques doivent pouvoir s'exposer sans intuition. En particulier on aime à rappeler que "les figures sont fallacieuses", ce qu'on savait depuis longtemps. Le recours aux symboles aide à se préserver des intuitions dans les phases du travail mathématique où cela s'impose.

Ainsi la langue mathématique, pour les gens d'aujourd'hui, comporte moins de figures que pour Galilée. Elle est plutôt cette vaste combinatoire de termes et de symboles qui servent à exprimer toutes sortes de situations dans le champ des mathématiques et ailleurs.

2.7. "Les mathématiques sont instrumentales." Les mathématiques ayant, depuis toujours, grandi sur des chantiers de problèmes, les concepts et les théories ont été conçus et ajustés pour servir à résoudre ces problèmes. De ce point de vue, ils apparaissent comme des instruments de pensée. Les problèmes en question se posent soit dans le champ des mathématiques elles-mêmes, soit dans celui de leurs applications. J. Ladrière (1966) exprime ainsi cette fonction à l'intérieur des mathématiques :

"Toute théorie mathématique, en dehors de son contenu propre, possède un rôle instrumental à l'égard d'autres théories et fournit la clé de problèmes posés dans d'autres secteurs des mathématiques." C'est ce qu'exprime aussi Bourbaki (1948) quand il écrit : "... chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique [...]; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut."

2.8. "Les mathématiques sont un outil." Du moins est-ce ce que disent beaucoup de physiciens et d'ingénieurs, certains ajoutant qu'elles ne sont qu'un outil. Paradoxalement, cette conception est bien différente de celle des mathématiques instrumentales. Ce que veulent dire les physiciens et ingénieurs, c'est que "les mathématiques fournissent des procédés de calcul pour débrouiller des problèmes situés en dehors d'elles-mêmes." Dans l'idée instrumentaliste, ramener les mathématiques à cela, c'est leur ôter l'essentiel. Car "les théories mathématiques ont toutes été élaborées comme moyen de pensée (et non seulement de calcul) sur des chantiers de problèmes situés en dehors ou en bordure d'elles-mêmes, mais aussi", nous l'avons souligné ci-dessus, "à l'intérieur des mathématiques." (cf. G.E.M. (1985)).

2.9. "Les mathématiques sont une source de joie." C'est la joie dont témoignent tous ceux qui arrivent à résoudre un problème : ils savourent leur capacité intellectuelle et apprécient la beauté des architectures de raisons. Cette façon de voir apparente les mathématiques à l'art, et ne s'oppose pas nécessairement à la conception utilitaire des mathématiques comme outil, puisqu'après tout, un outil peut être beau.

2.10. "Les mathématiques sont une science achevée." L'idée que les mathématiques sont une science complètement explorée est trop répandue pour qu'on puisse l'omettre dans un inventaire comme celui-ci. Combien de fois n'entend-on demander : "Mais que pouvez-vous bien encore chercher en mathématiques ? On n'arrive pas à imaginer." Pourtant les découvertes succèdent aux découvertes, et les questions nouvelles abondent. Le taux de croissance des publications mathématiques a même quelque chose d'inquiétant. Heureusement que la recherche aboutit fréquemment à de nouvelles synthèses qui rendent simples des questions jusque-là longues et difficiles.

3. LES MATHEMATIQUES ET LES AUTRES SCIENCES.

3.1. "Les mathématiques s'appliquent dans tous les domaines." Du moins est-ce ce qu'on entend dire. Les mathématiques ont toujours eu des liens de consanguinuité avec la physique et la technique. Le public les associe spontanément au nom d'Einstein, physicien prestigieux dont les conceptions ont orienté la civilisation technique du XX^{e} siècle. Les autres mathématiciens, même les plus grands, sont inconnus du public. Les mathématiques sont associées aussi aux technologies nouvelles, certaines redoutables : l'informatique des ordinateurs géants liés aux systèmes de communication et de gestion, les recherches spatiales et nucléaires.

Les mathématiques s'implantent peu à peu dans certains secteurs de la biologie, de l'économie, de la linguistique. On dit qu'elles se mettent à servir dans les disciplines qui en paraissaient jusque récemment les plus éloignées : l'anthropologie, la sociologie, ... Mais n'a-t-on pas gonflé démesurément l'exemple mille fois rappelé de Cl. Levi-Strauss appliquant quelques éléments de mathématiques à l'étude des structures de la parenté ? Certains parlent de mathématiques en psychanalyse, mais n'est-ce pas plutôt pour en faire un usage métaphorique que pour les appliquer au sens usuel de ce mot ?

Il est vrai toutefois qu'il existe un lien entre le courant structuraliste en sciences humaines et les mathématiques du XX^{e} siècle : pour le dire en peu de mots, c'est le parti d'étudier les relations entre les choses plutôt que les choses elles-mêmes, ce que nous avons déjà commenté au n° 2.4. pour ce qui est des mathématiques.

3.2. Les autres sciences posent des problèmes aux mathématiques. Les mesures de longueurs, d'aires et de volumes, et les problèmes de représentation des objets ont été le terreau sur lequel ont poussé la géométrie et une partie de l'analyse. Le reste de l'analyse est né dans la mécanique aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. La trigonométrie est sortie de l'astronomie de position dans l'Antiquité. On pourrait multiplier et détailler les exemples. De nos jours comme par le passé, les autres sciences alimentent les mathématiques : qu'on songe aux questions posées par la théorie des automates, la recherche opérationnelle, la théorie du contrôle, la cryptographie, etc.

3.3. Les mathématiques, le familier et l'évidence. Paradoxalement, les mathématiques sont plus que les autres sciences en prise directe sur le monde quotidien le plus immédiat. Elles commencent à 1, 2, 3, 4, ... et à l'addition des entiers, au rectangle et au cercle qui peuplent les maisons et les villes. La physique est d'entrée de jeu beaucoup plus abstraite : la vitesse, la force, la pression, la charge électrique sont des concepts autrement plus difficiles, et d'ailleurs apparus bien plus tard dans l'histoire que ceux de l'arithmétique et de la géométrie élémentaires. Les atomes, les molécules et les valences sont en chimie à distance considérable du monde sensible des transformations de matières.

Or s'il est vrai qu'au départ les objets des mathématiques sont simples, ils sont néanmoins tout de suite revêtus des attributs de la logique, d'une part, et des manipulations formelles, de l'autre. De la logique : les règles de la multi-

plication des entiers se démontrent, de même que la somme des angles d'un triangle. Des manipulations formelles : on multiplie les entiers selon les règles, sans éprouver le besoin de retourner à leur démonstration; l'algèbre la plus élémentaire fonctionne comme une combinatoire aveugle.

Pour ce qui est de la logique en action dans les mathématiques, c'est celle de tout le monde. Donc, tout le monde, semble-t-il, avec un peu d'entraînement, devrait pouvoir y entrer. L'un des traités de mathématiques les plus avancés, celui de M. Bourbaki (1958), outre qu'il s'intitule *Eléments de mathématiques*, annonce en avant-propos : "Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction."

Les mathématiciens disent et écrivent à tout bout de champ : "il est évident que ...", "il est immédiat que ...", comme si on ne pouvait pas décemment ne pas voir, comme si tant de choses relevaient d'une logique instantanée. Or l'absence d'un chaînon obscurcit le raisonnement le plus bref. Ce qui fait que les évidences mathématiques ne sautent pas toujours aux yeux, et que l'immédiateté annoncée prend parfois du temps. Un jour, le mathématicien Hardy, ayant proclamé une évidence, fut saisi d'un doute, se retira un long moment pour réfléchir, puis revint en disant : "c'est effectivement évident."

Et de fait, s'il est vrai que démontrer c'est amener à l'évidence, et que par ailleurs il existe des démonstrations longues, c'est que l'évidence coûte parfois cher.

3.4. "Les mathématiques, science prééminente". Les mathématiques sont tenues par certains pour une science prééminente, étant donné sans doute la certitude de leurs résultats (cf. 2.2.)

et l'universalité de leurs applications (cf. 2.6. et 3.1.).

Cette réputation est très ancienne. Elle s'enracine déjà dans l'étymologie du terme *mathématique*, issu du grec μάθημα qui veut dire, d'après Littré, l'instruction, la science par excellence. Le même Littré donne la locution *le mathématicien éternel* comme signifiant *Dieu*. Il cite Forcadel qui, au XVI^{e} s, écrit dans sa dédicace au Roy d'une édition d'Euclide : "Sire, entre les autres sciences dignes des plus grands princes et monarques du monde, je croy qu'il n'y a celui qui ne soit de ceste opinion que les mathématiques doilvent marcher devant toutes les autres." Quant à Furetière, à la fin du XVII^{e} s, il écrit curieusement : "Les mathématiques tiennent le premier lieu entre les sciences, parceque ce sont les seules qui sont fondées sur des démonstrations infaillibles. Bottinus a dit fort à-propos, que les Mathématiques sont des Sciences triomphantes, et non militaires, parcequ'on n'y dispute point. Quelques-uns ont donné ce nom à la Magie, parceque par le moiën des Mathématiques ont fait des choses si surprenantes, que le peuple croit qu'il y a de la magie."

4. ORIGINE DES MATHEMATIQUES.

4.1. Les mathématiques du ciel. Cette section et les deux suivantes sont inspirées par B. Charlot (1978), qui a emprunté à J.-T. Desanti les locutions "mathématiques du ciel" et "mathématiques de la terre". Dans la conception des mathématiques du ciel, les idées mathématiques préexistent au sujet pensant. Le chercheur ne les construit pas lui-même, il les découvre dans un monde d'idées pures, sorte de paradis platonicien où elles vivent d'une existence intemporelle. "Ainsi ...", écrit J. Ladrière (1966), "se révèle peu à peu la figure de ce monde invisible, souverain, et éclatant comme un ciel constellé, que les grands mathématiciens du XVII^{e} siècle avaient nommé d'un nom majestueux et inoubliable : la mathesis universalis."

4.2. Les mathématiques de la terre. Ce sont celles qui expriment l'ordre de la nature et que révèle l'étude de celle-ci. Comme les mathématiques du ciel, elles préexistent au sujet pensant.

4.3. Origine instrumentale des mathématiques. B. Charlot (1978) oppose les mathématiques du ciel et les mathématiques de la terre aux mathématiques instrumentales (cf. n° 2.7.), celles que le sujet pensant élabore par nécessité sur des chantiers de problèmes.

5. S'APPROPRIER LES MATHEMATIQUES; LES MATHEMATIQUES ET L'ENSEIGNEMENT.

5.1. "C'est de l'algèbre pour moi !" Nous avons déjà noté (cf. n° 2.6.) la tendance des mathématiques contemporaines à l'algébrisation. L'enseignement en a été affecté au point que bien souvent les élèves identifient *mathématiques* et *expression symbolisée*. A propos d'une activité qu'on leur propose, ils demandent : "doit-on la faire en mathématique ?" par opposition à "en français, avec des phrases". On se méfie des phrases, qui ont une réputation d'obscurité. Dans un manuel de mathématiques destiné à des élèves de douze ans, les auteurs (P. Coenraets et R. Janssens, 1976) disent avoir veillé "à une assimilation aisée de la mathématique par une pédagogie adaptée aux élèves de sixième [actuellement première]. De là le souci d'une présentation claire et l'insertion d'un minimum de texte." La plupart des manuels belges et français, surtout de l'époque des "mathématiques modernes", ont proposé de longs morceaux de mathématiques sans phrase. Or par contraste, tous les articles de recherche en mathématiques sont écrits dans la langue commune et entrecoupés de formules. Chaque formule est incorporée à une phrase où elle joue, selon le cas, le rôle de sujet, attribut, complément, ...

On peut croire aussi que pour se faire comprendre des élèves, le moyen le plus sûr est d'utiliser d'abord la langue qu'ils connaissent le mieux, à savoir la leur, pour passer ensuite, au fur et à mesure des besoins longuement éprouvés, à la langue des lettres et des signes.

Pour beaucoup, en tout cas, à défaut d'avoir pu s'y intéresser d'assez près, les symboles dissimulent la pensée. "C'est de l'algèbre pour moi" disait-on déjà au XVII^{e} siècle (Furetière, 1694), ce qui est synonyme de : "C'est du chinois, ou du grec", deux langues dont l'alphabet n'est pas le nôtre.

5.2. "Les maths, à quoi ça sert ? Vous verrez plus tard." Les élèves demandent souvent à quoi ça sert tout ça, dans les cours de math. Question, et inquiétude, qui s'opposent à la conviction que les mathématiques ont "de plus en plus d'applications dans des domaines de plus en plus nombreux" (cf. n° 3.1.) et qu'elles sont "la langue universelle des sciences" (cf. n° 2.6.).

Or on ne pose pas de question analogue pour les autres sciences, car chacune d'elles - nous l'avons rappelé au n° 2.4. - a son objet propre; et on voit clairement que cela peut servir ou que c'est intéressant d'étudier les marées, les langues, les atomes. Evidemment, on peut être contre certains usages de la science, mais c'est une autre question : qu'ils soient bons ou mauvais, on discerne assez bien ces usages.

Quant aux mathématiques, on peut les voir comme n'étudiant aucun objet, mais seulement des relations (cf. n° 2.4.). Or le mouvement premier de la pensée connaissante se porte vers les choses, dont elle s'efforce de reconnaître les propriétés et leur façon de se combiner. C'est se mouvoir à l'envers que d'étudier d'abord les propriétés et de les attribuer ensuite - peut-être - à des choses. Rappelons la boutade de Russell : "En mathématiques, on en sait pas de quoi on parle, ni si ce qu'on en dit est vrai !" Dans son ironie, elle décrit la position de ces intellectuels qui savent travailler au-dessus du vide et sont persuadés que cela a un sens. Mais pour beaucoup, les mathématiques sont comme une algèbre sans fond. Ils ont besoin d'un aliment plus substantiel.

En fait, les concepts et les théories servent à résoudre des problèmes. Mais il arrive souvent qu'on enseigne une théorie sans avoir matière à l'utiliser dans des applications dignes de ce nom. On est alors réduit à l'enseigner pour elle-même. Et pour la faire mieux comprendre, on l'entoure d'exemples, ou comme dit P. Hilton (1973), d'illustrations. Une *illustration* est une situation, la plus simple possible, qui éclaire la théorie, qui sert à la comprendre. Une *application* au contraire est un problème lourd, que la théorie sert à comprendre et à résoudre. On ne peut donc pas dire que la théorie sert dans les illustrations. Ce sont les illustrations qui servent à enseigner la théorie, et elles sont souvent artificielles, hétéroclites. Si on s'arrête là, la théorie paraît dogmatique et futile. Est-ce que la théorie n'accouche que de si petites souris ? Quand une théorie n'est entourée que de modèles dérisoires, son déroulement contraint la pensée, l'immobilise.

Pour que les élèves comprennent à quoi servent les mathématiques, la seule façon serait qu'ils les voient servir sur le champ. C'est-à-dire qu'aucun concept, aucune théorie ne soit construite - ou reconstruite - dans la classe que pour résoudre des problèmes, des difficultés dûment éprouvées. Ce seront au début des questions intrigantes posées dans le champ des évidences familières, puis petit à petit dans le champ des connaissances acquises, que ce soit en mathématiques ou ailleurs.

Enseigner ainsi les mathématiques, c'est emprunter la voie instrumentale. B. Charlot (1978) a bien expliqué comment les deux conceptions des mathématiques "du ciel" et "de la terre" (cf. n° 4) induisent, si on n'y prend garde, des enseignements tout différents. Elles risquent d'inspirer, la première, un discours révélant le paradis platonicien des idées mathématiques pures, et la seconde, des constats expérimentaux des propriétés mathématiques.

5.3. La bosse des maths. Les mathématiques sont, dit-on, un don. La bosse des maths n'a pas toujours été un symbole. Dans la théorie phrénologique de Gall au début du XIX^{e} siècle, elle était une authentique protubérance crânienne. Quoiqu'il en soit de la bosse au sens propre, l'idée de l'aptitude innée aux mathématiques n'a jamais disparu. On entend dire : "J'ai toujours été nul en math. Alors il ne faut pas s'étonner que mes enfants ne s'y débrouillent pas bien." Cette croyance commune est soutenue par des contributions scientifiques controversées, sur lesquelles il y aurait beaucoup à dire. Les garçons seraient en moyenne plus doués que les filles (cf. C.P. Benbow et J.-C. Stnaley (1980)) : résultat douteux de l'aveu même des auteurs, mais néanmoins repris sans nuance par la grande presse.

Le "don" pour les mathématiques se reconnaît souvent à la rapidité de compréhension, et pas nécessairement à la capacité d'inventer. Les esprits lents, ceux qui mûrissent longuement les problèmes, ou sont plus exigeants que d'autres, partent défavorisés dans la hiérarchie du don. On pose peu de problèmes longs dans l'enseignement : à peu près tous les exercices s'y bouclent en un quart d'heure. Paradoxalement, Einstein, celui dont l'opinion fait le génie mathématique par excellence, était, dit-on, un esprit lent. Sans doute pas très doué au sens banal du mot doué.

Si on laissait à chacun le loisir de réfléchir à son aise, peut-être s'apercevrait-on avec Descartes (1637) que "la puissance de bien juger et distinguer le vrai d'avec le faux, qui est proprement ce qu'on nomme le bon sens ou la raison, est naturellement égale en tous les hommes." Le slogan "tous capables !" du Groupe Français d'Education Nouvelle dit à peu près la même chose en termes plus concis.

Quoiqu'il en soit, ne pas avoir la bosse des maths, ou

plutôt se persuader ou s'entendre dire qu'on ne l'a pas, est d'autant plus écrasant que, comme nous l'avons vu, "les maths servent dans tous les domaines" (n° 3.1.) et qu'elles touchent déjà, à travers l'arithmétique, l'algèbre élémentaire et la géométrie, au monde le plus quotidien (n° 3.3.). Avoir la bosse des maths, c'est être intelligent. Ne pas l'avoir ... Qui plus est, comme nous allons le voir, "les maths forment l'esprit."

5.4. "Les mathématiques forment l'esprit". Il est vrai qu'en pratiquant les mathématiques on apprend à raisonner juste, ne serait-ce que dans les matières qui se prêtent au raisonnement ... mathématique. On apprend à éviter les principaux paralogismes, en particulier ceux qui tiennent à des confusions de quantificateurs logiques. On apprend à structurer sa pensée.

Certains pensent plus radicalement qu'apprendre à raisonner en mathématiques, ce serait apprendre à raisonner tout court, car il n'y aurait pas trente-six façons de raisonner.

Pourtant les notions quotidiennes n'ont ni la même portée, ni le même usage que les concepts mathématiques. Voyons d'abord du côté des notions que représentent les mots de la langue commune. "Il n'y a rien de plus," écrit P. Valéry (1931) "il ne peut rien y avoir de plus dans un sens de mot que ce que chaque esprit a reçu des autres, en mille occasions diverses et désordonnées, à quoi s'ajoutent les emplois qu'il en a faits lui-même, tous les tâtonnements d'une pensée naissante qui cherche son expression."

Les concepts mathématiques possèdent eux aussi une telle épaisseur de sens, accumulée dans tous les contextes où on les a vu opérer. Néanmoins, chacun est doté en outre d'un sens univoque, étroitement défini, et qui en réglemente l'usage. Ce dernier est celui que nous avons ailleurs (G.E.M. 1982) proposé d'appeler le sens *lexical*, celui que donne un dictionnaire des termes mathématiques, pour l'opposer à l'autre, le sens *contextuel*.

Or le raisonnement mathématique est commandé par le sens lexical, même si les idées mathématiques s'appuyent essentiellement sur le sens contextuel. Rien de tel en dehors des mathématiques, ou, plus largement, des matières formalisables. Pourtant on y raisonne et argumente sans cesse, bien que les concepts n'y soient pas soumis à des règles d'usage univoques. On y argumente bien ou mal, à travers des difficultés de précision, d'information, à travers aussi des questions de valeur et des influences affectives. Néanmoins, une opinion bien argumentée vaut mieux qu'une autre qui l'est mal ou ne l'est pas du tout. Faut-il, avec Pascal, opposer l'esprit de finesse à l'esprit de géométrie ? Et si on le fait, on verra bien à l'exemple de plus d'un mathématicien dépourvu d'esprit de finesse, que savoir raisonner en mathématiques n'implique pas nécessairement que l'on raisonne ou argumente bien ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.P. Benbow, J.-C. Stanley, Sex differences in mathematical ability : fact or artifact, Science 210 (1980), 1262-1264.

[2] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques*, Livre 1, Hermann, Paris, 3e éd. 1958.

[3] N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, dans F. Le Lionnais (éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948.

[4] B. Charlot, Les contenus non mathématiques dans l'enseignement des mathématiques, *Cahiers Galilée* 42 (1978), 5-9.

[5] P. Coenraets, R. Janssens, *Mathématique 6*, De Boeck, Bruxelles, 1976.

[6] R. Descartes, *Discours de la méthode*, 1637.

[7] H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

[8] A. Furetière, *Dictionnaire universel* ... Nouvelle éd., Arnout et Reisnier Leers, La Haye et Rotterdam, 1694.

[9] Galileo Galilei, *Il saggiatore*, 1623.

[10] Groupe d'Enseignement Mathématique, Lettre du G.E.M. au Groupe Français d'Education Nouvelle (G.F.E.N.), *Dialogue* 54 bis (1985), 10-27.

[11] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York, 1952; (éd. originale 1932).

[12] P.J. Hilton, *Le langage des catégories*, trad. J.-C. Mathys, CEDIC, Paris, 1973.

[13] M. Kline, *Calculus, an intuitive and physical approach*, J. Wiley, New York, 2e éd. 1977.

[14] J. Ladrière, Objectivité et réalité en mathématiques, *Dialectica* 20 (1966), 215-241.

[15] E. Littré, *Dictionnaire de la langue française*, Hachette, Paris, 1878.

[16] P. Robert, *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*, Société du Nouveau Littré, Paris, 1963.

[17] N. Rouche et altr., *L'archipel des isométries*, G.E.M. Louvain-la-Neuve, 1982.

[18] P. Valéry, *Regards sur le monde actuel*, Stock, Paris, 1931.

REMERCIEMENTS

Les membres du Groupe d'Enseignement Mathématique de Louvain-la-Neuve ont critiqué un brouillon de cet essai d'inventaire. Sans leur intervention attentive, la version finale aurait été moins fournie et moins ordonnée. Merci.