QUESTIONS SUR LES ERREURS

N. ROUCHE,

LOUVAIN-LA-NEUVE (BELGIQUE).

Résumé. Les erreurs font partie de l'activité mathématique et donc il est bien naturel de s'interroger sur leur nature et leur rôle. Mais ce n'est pas simple. On tente ci-après de montrer qu'il est peu fructueux de définir la notion d'erreur et peu convainquant de classer les erreurs. Que par contre il y a davantage de sens à chercher de bons points de vue pour analyser les erreurs, ou, en d'autres termes, de bonnes questions pour les interroger. L'essentiel de l'exposé qui suit est, à titre d'essai, une recherche de questions éclairantes sur les erreurs. Pour atteindre à son plein sens, elle devrait être poursuivie, approfondie, corrigée.

> La vérité n'a son plein sens qu'au terme d'une polémique. Il ne saurait y avoir de vérité première. Il n'y a que des erreurs premières.
>
> G. Bachelard.

1. PAR QUEL BOUT PRENDRE LES ERREURS ?

Puisqu'il faut bien commencer par un bout, jetons d'abord un coup d'oeil prudent sur une erreur célèbre, celle de Cauchy sur les suites de fonctions continues.

Exemple 1. Trois façons de parler d'une erreur. Dans son cours d'analyse, Cauchy (1821) énonce et "démontre" le théorème faux qui dit que la limite de toute suite convergente de fonctions continues est une fonction continue. Jusqu'à lui, ce théorème avait été admis comme évident en vertu du *Principe de continuité* aux termes duquel "si une quantité variable jouit à toutes les étapes d'une certaine propriété, sa limite jouit de la même propriété[1]". Par ailleurs, c'est vers la même époque que la série de Fourier

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$$

apparût, grâce au progrès des concepts de fonction et de continuité, comme un contre-exemple au théorème en question. On admit donc que ce théorème souffrait des exceptions, mais curieusement cela ne mit pas immédiatement en branle la recherche de l'erreur dans la démonstration de Cauchy. C'est seulement en 1847 que P.L. Seidel débusqua cette erreur et restaura le théorème en y substituant l'hypothèse de continuité uniforme, concept créé pour les besoins de la cause, à celle de continuité. I. Lakatos (1979) considère que l'on doit à Seidel, outre le théorème correct, la pratique méthodologique, qui nous paraît si naturelle aujourd'hui, de critiquer la preuve d'un théorème dès qu'on dispose d'un contre-exemple. Bien que schématique à l'extrême, ce récit montre de quelle façon l'erreur de Cauchy a été un événement majeur dans l'histoire des mathématiques.

Reprenons l'affaire en changeant de point de vue. Cauchy a cru démontrer le théorème faux en question. Son erreur, exprimée dans le langage d'aujourd'hui, a été de confondre l'ordre de deux quantificateurs dans la définition de la continuité. Seidel a redressé l'énoncé en y substituant l'hypothèse de continuité uniforme à celle de continuité, ce qui revient précisément à prendre les quantificateurs dans l'ordre qui permet la preuve du théorème.

Voici maintenant l'erreur de Cauchy cadrée tout autrement. Si Cauchy s'est trompé, c'est bien parce qu'il a voulu démontrer le théorème. Mais pourquoi a-t-il voulu démontrer cette proposition dont personne ne doutait ? C'est que l'analyse en général paraissait mal fondée depuis des décennies et que Cauchy, inspiré par le modèle des Eléments d'Euclide, a entrepris de la reconstruire en lui donnant "toute la rigueur que l'on exige en géométrie". "Je fais disparaître toute incertitude" annonce-t-il avec une assurance qui contribue à expliquer que le théorème ait été si long à faire peau neuve (Lakatos, ibid., pp. 137-8).

---

[1] Le *Principe de continuité* est énoncé sous cette forme par S. L'Huilier en 1787 (cité par C.L. Boyer (1949), p.256). On le fait remonter à Leibniz. Sur ce théorème faux de Cauchy, voir l'étude détaillée de I. Lakatos (1979).

Voilà donc trois façons de parler de l'erreur de Cauchy, chacune ni plus ni moins vraie que les autres. La première suggère qu'il était naturel de croire à un énoncé soutenu par un principe philosophique dont les lettres de noblesse remontaient à Leibniz. Elle s'intéresse à la longue persitance de l'erreur (presque trente ans) et au progrès méthodologique qu'elle a induite. La seconde réduit l'erreur de son articulation purement logique : glissement sur les quantificateurs dont on n'usait pas à l'époque mais qui étaient nécessairement cachés, implicites, dans la définition de la convergence de Cauchy. C'est une façon de revoir l'erreur à travers les moyens d'analyse d'aujourd'hui. La troisième rattache l'erreur non plus à un principe philosophique, mais au projet global de Cauchy et à l'influence séculaire de la géométrie euclidienne.

Gageons qu'il y a d'autres façons encore d'analyser, d'interpréter cette erreur, de s'interroger sur sa ou ses causes et ses conséquences. Qui plus est, et c'est ce qui nous intéresse ici, n'est-ce pas le cas pour toute erreur ou à peu près ? N'y a-t-il pas moyen de parler d'une erreur donnée quelconque de toutes sortes de points de vue et de façons ? C'est en tout cas une thèse dont nous chercherons ci-après à montrer la vraisemblance.

Mais la multiplicité des récits et des analyses possibles, et donc une certaine indétermination du discours, débordent le champ des erreurs. L'histoire et la sociologie sont remplies de ces faits qui , n'étant pas univoquement donnés, peuvent être pris par divers bouts. Pour parler de la causalité historique, P. Veyne (1979), p.117, prend le cas des accidents (et après tout, une erreur n'est-elle pas une sorte d'accident ?) : "(...) tel est le fin mot de la notion de causalité. Supposons, en effet, qu'il faille dire quelle a été la cause d'un accident d'automobile ? Une voiture a dérapé à la suite d'un coup de frein sur une route mouillée et bombée; pour les gendarmes, la cause est la vitesse exagérée ou l'usure des pneus; pour les Ponts et Chaussées, le bombement exagéré; pour un directeur d'auto-école, la loi, méconnue des élèves, qui veut que l'intervàlle de freinage croisse plus que proportionnellement avec la vitesse; pour la famille, c'est la fatalité, qui a voulu qu'il plût ce jour-là ou que cette route existât pour que le conducteur vienne s'y tuer."

Revenons maintenant des accidents vers les erreurs en songeant à l'immense variété de celles-ci, en particulier celles des élèves, et à la foule de leurs connotations possibles. Non seulement chaque erreur peut être décrite dans ses relations au sens mathématique et aux intuitions qui le nourrissent, mais encore on peut la rattacher, outre au passé intellectuel (éventuellement très long) de l'individu, à une foule de facteurs psychologiques ou sociaux : fatigue, distraction, surexcitation, mauvais équilibre familial, et encore, s'il s'agit d'erreurs faites à l'école : choix pédagogiques du professeur, peur de l'examen, approche des vacances, etc., etc.

Ainsi aucune erreur n'est un objet donné en soi, que l'on pourrait saisir dans une description complète. Tout qui expose ou explique une erreur le fait, consciemment ou non, à partir de points de vue particuliers. Dès le moment où on s'efforce de la connaître, l'erreur est un objet mental construit, découpé dans la réalité touffue à l'aide de points de vue, de concepts.

Ceci dit, est-il besoin, pour commencer à étudier les erreurs, de disposer d'une définition de l'erreur (au singulier) ? Un besoin (assez primitif) de rationalité pourrait donner à croire que oui, puisque d'une part on doit pouvoir reconnaître, à quelque signe distinctif, les événements à prendre en compte (et qu'on appellera *erreurs*), et d'autre part "il faut savoir de quoi on parle" pour ne pas parler dans le vague. Mais une définition ne sera jamais qu'une formule sommaire. Une erreur, selon A. Lalande (1951) est "l'acte d'un esprit qui juge vrai ce qui est faux ou inversement." Le mot *erreur* rend des services précis dans la langue commune, non pas parce que chacun le réfère à une définition univoque comme celle-là, mais bien parce qu'en chacune de ses occurences il sert à évoquer un accident particulier que le contexte suffit à cerner.

On ne voit pas quel mal il y aurait, dans une étude (qui se veut rigoureuse) des erreurs en mathématiques, à prendre en compte l'un ou l'autre événement qui ne se laisserait pas enfermer dans les limites d'une définition de l'erreur adoptée à l'avance. On ne voit pas non plus ce qu'une telle définition apporterait à la construction mentale des erreurs, car cette construction procède de l'acuité du regard sur la réalité concrète et riche et non d'une abstraction, pauvre par essence.

Ainsi donc, renonçons, au départ de notre étude sur les erreurs, à savoir dire précisément ce qu'est une erreur. Prenons ce mot au sens commun et vague, puis repérons des erreurs, des événements que l'on a l'habitude d'appeler ainsi. Renonçons à les décrire complètement et objectivement (nous avons vu que c'était impossible), mais tentons de les construire comme objets de recherche à l'aide de points de vue, de concepts. En particulier nous limiterons ci-après notre étude aux facettes épistémologiques des erreurs, décision qui par ailleurs contribue mais ne suffit pas à cerner un champ d'analyse.

A supposer maintenant que l'on ait "construit" une collection assez ample d'erreurs bien réelles, pêchées dans l'histoire ou dans des activités mathématiques vivantes, un nouveau réflexe "rationaliste" voudrait que l'on classe les trouvailles en types. On a vu qu'il était assez vain de définir l'erreur (au singulier). Serait-il alors possible et utile de définir ces choses plus particulières que seraient des types d'erreur ? Un concept général et vague serait ainsi remplacé par plusieurs concept précis. C'est ce que nous avons tenté de faire en préparant le présent exposé, mais en vain. Nous n'avons bien entendu pas réussi à partager nos exemples d'erreurs en classes mutuellement exclusives. Mais même tout autre essai de classement s'est avéré boîteux, entouré de réserves et d'exceptions qui l'empêchaient d'être clair. L'entreprise n'est en tous cas pas facile.

Mais sa difficulté n'est-elle pas due à ce qu'elle serait prématurée ? N'y a-t-il pas en effet un point de méthode à approfondir d'abord ? Si chaque erreur doit être construite à l'aide de concepts, de caractères, de points de vue, ne faut-il pas concentrer d'abord l'effort de recherche sur ces points de vue ? Et se demander quels concepts conduisent à interroger pertinemment les erreurs, à en exhiber les facettes, les tenants et les aboutissants, à montrer leur lien au contexte, leur fonction, leur sanction, etc., etc. Dans la suite de cet exposé, nous posons quelques jalons de ce programme, non pas dans l'abstrait, mais en éprouvant l'efficacité des concepts dans des analyses d'erreurs racontées. Et nous renonçons à classer ces erreurs.

Quelques mots maintenant sur les sources de notre travail. C'est une idée dorénavant bien admise que les objets de la science ne sont pas donnés tels quels au chercheur, et qu'ils sont au contraire des objets mentaux construits par lui à l'aide de concepts, de points de vue. Ceci est vrai dans les sciences de la nature[2] comme dans les sciences humaines[3]. Les erreurs en tant qu'objets de connaissance n'échappent pas à la règle. Sur l'idée, appliquée à l'histoire, d'affiner et d'enrichir la famille des concepts servant à construire mentalement les objets de connaissance, on consultera le très intéressant ouvrage déjà cité de P. Veyne (1971).

Il existe beaucoup de contributions à l'étude des erreurs considérées autant dans l'histoire que dans les écoles. Mais elles sont d'autant plus difficiles à dépister qu'elles se dissimulent souvent dans des travaux non explicitement consacrés à l'erreur. En un sens l'histoire entière des mathématiques est celle des erreurs vaincues, les erreurs et les ruses contre les erreurs sont le tissus même de l'histoire. Et il en va de même pour l'enseignement. Voici, parmi les études explicitement consacrées aux erreurs, les repères qui nous ont servi.

---

[2] Par exemple, la mécanique de Galilée, Newton et Einstein est issue d'"expériences de pensée"; sur la construction mentale des objets de la physique, voir entre autres J.-M. Lévy-Leblond (1984), p.207.

[3] Voir par exemple le chapitre "La construction de l'objet" et les textes de Durkheim et Weber dans P. Bourdieu _et altr._ (1983).

M. Lecat (1935) rassemble, par ordre alphabétique des noms d'auteurs (mais avec un index analytique) 476 erreurs de mathématiciens, des origines à nos jours. Il n'essaye pas de définir l'erreur, se contentant de la considérer comme "funeste" et résultant, c'est ce qu'il dit à propos d'Euler, d'"inadvertances".

R. Dugas (1940) tente ce qu'il appelle "l'étiologie de l'incompréhension mathématique". Il étudie, à travers de multiples exemples historiques, les difficultés liées à l'axiomatique, au langage, à la nature des démonstrations, à l'infini, aux relations des mathématiques avec la réalité, etc., en s'appuyant sur un large registre d'explications. Cette étude demeure essentielle.

L'ouvrage déjà mentionné de I. Lakatos (1979) tente d'expliquer en profondeur le rôle des erreurs dans la construction du savoir mathématique : l'erreur dans une démonstration réagissant non seulement sur celle-ci, mais encore sur l'énoncé et sur les concepts qui y sont engagés. D'où la notion de "proof-generated concept", ce qu'on peut traduire, en explicitant, par : "concept engendré pour redresser une preuve boîteuse". Les trois exemples historiques traités en long et en large par Lakatos l'amènent à examiner (à construire ...) une suite d'erreurs, à propos du théorème d'Euler sur la relation entre nombres de sommets, arêtes et faces d'un polyèdre, de la limite d'une suite de fonctions continues (cf. ci-dessus) et de l'intégrale de Riemann (fonctions à variation bornée).

I. Doubnov (1974) expose quelques erreurs en géométrie résultant principalement de figures maladroites, de l'omission de cas de figure ou de passages inconsidérés à la limite.

A propos des erreurs à l'école, il faut citer la trilogie de S. Baruk, (1973), (1977) et (1985), qui est avant tout attentive au problème du sens. Dans le troisième de ces ouvrages, elle distingue deux types d'erreurs. Les premières, qualifiées de *structurelles*, apparaissent dans l'activité mathématique habituelle. "(...) l'erreur en mathématiques, dans ce qu'elle aurait de structurel (...), c'est l'irruption de la subjectivité, mais d'une subjectivité déjà mathématisée, d'une subjectivité mathématisante : le désir "que ce soit comme ça" n'est pas n'importe quoi, il portera toujours, malgré ce qu'il pourra produire d'apparemment absurde, la marque du mathématique." Les erreurs du second type, qualifiées de *conjoncturelles*, sont celles qui résultent des conceptions qu'on se fait des mathématiques et de leur enseignement. S. Baruk illustre et commente abondamment, parmi ces erreurs, les absurdités qui apparaissent dans des copies d'élèves, surtout dans des exercices de calcul, et les rattache souvent aux moyens défectueux d'expression langagière ou graphique.

N. Milhaud (1980) a relevé les façons dont quelques enseignants ont jugé des erreurs d'élèves, construisant ainsi une "typologie des erreurs" telles que les maîtres les voient spontanément. Elle distingue les erreurs de confusion, de logique, d'explicitation, de consigne, d'application, de stéréotype, de vision, les erreurs grossières, les erreurs du n'importe quoi, les erreurs d'étourderie, de compréhension, de connaissance, et enfin l'erreur du problème inachevé. Cette liste (utile par ailleurs) suffit, par son vague, à prouver que ce n'est pas dans les propos spontanés des enseignants qu'il faut chercher à approfondir la connaissance des erreurs.

A. Bouvier (1982) relate comment des élèves (et des professeurs) ont donné sans sourciller des réponses à des problèmes absurdes. Il parle des théorèmes-élèves et invite à se demander ce que veulent dire les erreurs des élèves.

F. Duverney (1983) distingue l'erreur "normale" ("dans un apprentissage nouveau, il est normal de se tromper, cela peut même être très instructif pour l'élève (...)") et l'erreur "pathologique" ("celle qui intervient dans un calcul ou un raisonnement, résultant d'un apprentissage ancien, et qui ne devrait plus être là si l'apprentissage s'était effectué normalement.") Il analyse des erreurs d'élèves dans des calculs ou des déterminations de domaines de fonctions. Il leur trouve pour causes des lacunes ou des maladresses de l'enseignement et propose chaque fois un enseignement redressé.

Venons-en maintenant, comme annoncé, à dégager quelques points de vue sur les erreurs. Nous tirons nos exemples indifféremment d'activités mathématiques élémentaires ou avancées : c'est un essai, le résultat dira si cette décision est pertinente. Nous n'aborderons qu'à la Section 9 les erreurs explicitement connotées par le système scolaire et en particulier par les examens.

2. MAL DISCERNER MATHEMATIQUES ET REALITE.

Pour un débutant les mathématiques n'existent pas. Il y a seulement le monde physique et mental, et les questions qu'il pose. Tant qu'il n'a pas assez compris en quoi consistent les mathématiques par opposition à la réalité, il démêle difficilement les propositions qui se rattachent aux unes ou à l'autre. Il voit un défaut des mathématiques là où un modèle théorique s'avère n'avoir qu'un domaine de validité limité.

Exemple 2. Les rebonds d'une balle. (Opinion sur le "déraillement" d'un modèle mathématique.) Une balle de ping-pong rebondit sur un sol dur et perd à chaque rebond un tiers de sa hauteur. Affirmation raisonnable résultant de quelques mesures. La suite des hauteurs atteintes, si on lâche la balle de 1 m de haut est

$$1,\ \frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \ldots \qquad (1)$$

Cette suite est infinie : ainsi la balle rebondit une infinité de fois, ce qui est difficilement acceptable. Qui plus est, la suite (1) tend vers 0. Or qu'est-ce qu'un bond de hauteur $(2/3)^{1000}$, plus petite que les dimensions d'un noyau d'atome ? Le modèle mathématique (1) déraille. Des élèves s'écrient : "Mais alors les mathématiques sont fausses !", révélant par cette exclamation leur foi initiale - et désormais ébranlée - dans un accord parfait entre les mathématiques et la réalité.

Les rebonds de la balle sont au départ modélisées sans réticence : quoi de plus naturel que chaque bond monte aux 2/3 du précédent ? L'inadéquation ne se révèle qu'à un tournant ultérieur de la pensée et en quelque sorte par surprise. Elle est d'autant plus vivement ressentie que le modèle théorique avait paru s'imposer. Par contre, on ne peut construire certains modèles mathématiques qu'en admettant une inadéquation *au départ*. Transgression délibérée donc et de ce fait difficile à accepter tant qu'on n'a pas saisi, et cela ne vient qu'à la longue, le rapport des objets mathématiquement construits à la réalité qui les déborde toujours.

Exemple 3. Un pendule sans frottement; le principe de Galilée. (Ne pas admettre a priori qu'un modèle mathématique s'écarte de la réalité.) On étudie tel mouvement, celui d'un pendule par exemple, en décidant de négliger le frottement, ce qui a pour effet de remplacer par la pensée un mouvement amorti et qui s'arrête par un autre périodique et éternel : changement majeur, non seulement quantitatif, mais qualitatif, difficile à admettre.

Induire le principe de Galilée de l'expérience commune est une déviation du même type, plus déroutante si c'est possible. Elle revient à parler d'un objet non soumis à des forces, ce que personne ne verra jamais, et à lui assigner une trajectoire illimitée, ce que l'humanité a mis deux millénaires à considérer comme imaginable. Galilée lui-même, refusant avec Aristote l'infini au sens de l'illimité, considérait que l'objet faisait le tour de la terre.

L. Viennot (1979) a étudié ce type d'erreur chez de nombreux étudiants. Même après avoir suivi un cours de mécanique rationnelle, beaucoup considèrent par exemple qu'il faut une force pour maintenir un mobile à vitesse constante. Prisonniers des sensations et observations quotidiennes ils n'ont pas accepté le modèle mathématique que consitutent les principes de la mécanique. Le seuil était trop grand pour eux.

Les erreurs de mesure donnent lieu aussi à une méprise sur les statuts respectifs de la réalité expérimentale et des mathématiques.

> <u>Exemple 4. Mesurer la diagonale d'un carré. (L'illusion de la "mesure vraie".)</u> On demande à des élèves de mesurer à la règle graduée la diagonale d'un carré de côté égal à 1. Ils trouvent quelques valeurs distinctes et s'en étonnent. Ils recommencent en améliorant la précision de la lecture : ils trouvent des valeurs distinctes plus nombreuses, quoique moins dispersées. Ils finissent par demander au professeur : "Mais dites-nous maintenant la *vraie* mesure !"

Ici, curieusement, les élèves se trompent à propos des erreurs (de mesure). On veut mesurer un objet qui existe bel et bien et dont on n'imagine pas qu'il pourrait ne pas avoir de mesure (vraie). Les mesures (approchées) sont supposées avoir un écart par rapport à cette mesure (vraie). Or celle-ci n'existe pas, au sens où personne ne la fera jamais. On se sert alors des mesures approchées (erronées ?) pour définir statistiquement ce que l'on traitera par convention comme la mesure vraie. Les erreurs de mesure étant irréductibles, on doit bien fonder le savoir empirique sur des mesures "erronées". Il faut du temps, moins pour réaliser la fatalité des erreurs de mesure que pour perdre la foi en l'existence de la mesure vraie. Il faut du travail ensuite pour domestiquer statistiquement les erreurs, ce qui est proprement théoriser la difficulté à défaut de pouvoir l'écarter. Il en faudra ensuite pour construire le modèle mathématique $\sqrt{2}$ (sans le confondre avec la vraie mesure). Ce modèle posera par ailleurs lui aussi un problème d'existence et d'erreurs, vu son inaccessibilité par un système de numération (cf. ci-dessous, n° 3).

Voici un dernier exemple. Il montre des emprunts sauvages à la réalité empirique, dans une pensée mathématique en formation.

Exemple 5. Angles et pavages. (Mélanger les assertions empiriques et mathématiques; confondre la thèse et l'hypothèse.) Pour qu'un pavage du plan (cf. Fig. 1) soit possible, il faut que la somme des angles intérieurs des polygones rassemblés en un noeud fasse 360°. On peut vérifier cette condition si on connaît *par ailleurs* les

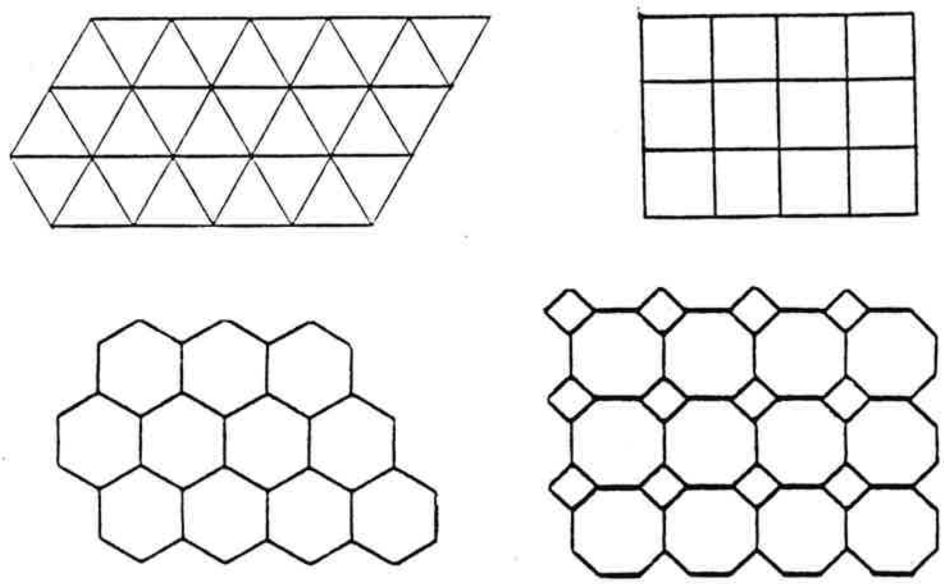

Fig. 1

valeurs des angles. Supposons que ce ne soit pas le cas. Mais les pavages de la Fig. 1 réalisés en carton s'ajustent si bien qu'on ne voit pas pourquoi on poserait le problème de leur existence mathématique. D'autre part, on tire de ces mêmes pavages que les angles des triangles équilatéral, carré, hexagone et octogone valent respectivement 60°, 90°, 120° et 135°. Pour le pentagone (Fig. 2) on ne sait pas. Quant à l'assemblage de la Fig. 3, il est douteux.

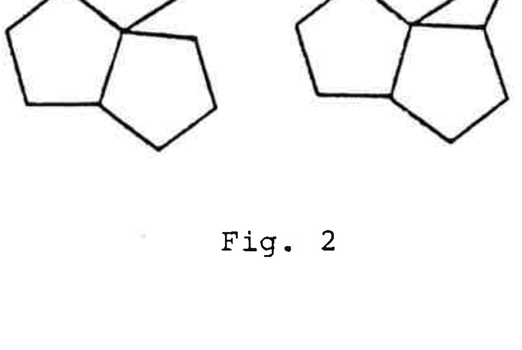

Fig. 2

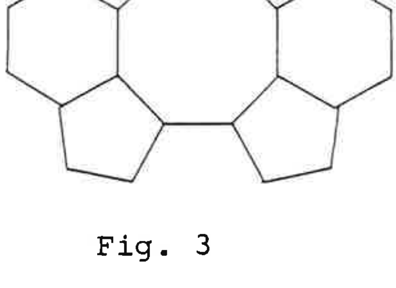

Fig. 3

Réalisé en carton, il s'ajuste à peu près. Alors de deux choses l'une : ou bien on croît que l'"à peu près" vient d'un découpage imprécis et que les trois polygones théoriques s'adaptent théoriquement bien (alors on en tire l'angle du pentagone : 360 - 120 - 135 = 105° : erreur!); ou bien on ne sait pas si l'"à peu près" vient d'un découpage imprécis ou de ce que la somme des trois angles ne fait pas, théoriquement, 360°. Ce dernier doute renforce l'exigence de déterminer *par ailleurs* l'angle du pentagone (en fait les trois angles forment ensemble 363°).

Celui qui aurait l'intention (mathématique) ferme de prouver l'existence de certains pavages (c'est la thèse), en montrant pour commencer qu'une certaine somme d'angles fait 360°, ne se laisserait pas distraire jusqu'à tirer de l'existence (empirique) de certains pavages des valeurs d'angles qui doivent lui servir d'hypothèses. Et devant l'indécision de la Fig. 3, il se laisserait encore moins aller à déduire l'angle du pentagone de cet ajustement douteux. Mais les intentions des débutants ne sont pas les mêmes que celles du mathématicien. Ils s'intéressent aux pavages plus qu'à une construction mathématique et sont preneurs de toute vérité, d'où qu'elle vienne. Oserait-on dire qu'ils se trompent de projet ?

On pourrait croire que les difficultés exhibées par les Exemples 2 à 5, du fait qu'elles touchent toutes par un côté au monde physique, ne se rencontrent pas dans l'activité ou l'apprentissage mathématiques proprement dits. Mais il est de fait, répétons-le, que les débutants ne discernent pas clairement les connaissances mathématiques et empiriques. Leur univers mental forme au départ un tout dans lequel les mathématiques se construisent par à-coups en tant que domaine distinct, soumis à ses usages propres et à des règles de correspondance avec le reste. D'ailleurs les professeurs de mathématiques le savent très bien, eux qui produisent de longues (et nécessaires) explications sur ce qui distingue un point mathématique d'une petite tache, une droite d'un trait de crayon, etc. Sur ces difficultés épistémologiques des débuts de la géométrie, cf. G.E.M. (1981).

3. LES ERREURS QUI ONT UN STATUT.

Certaines choses qu'on appelle erreurs en mathématiques ne peuvent pas être connotées négativement, soit parce qu'elles tiennent à la théorie même, soit parce qu'elles sont la base d'une méthode de recherche.

Ainsi non seulement il faut bien considérer les approximations rationnelles d'un nombre irrationnel, puisque celui-ci est inaccessible autrement, mais en outre, et plus fondamentalement, l'irrationnel n'a d'existence qu'à travers ses approximations. C'est l'ensemble de ses valeurs rationnelles approchées (et donc "erronées") qui le définit. L'erreur (ou l'"erreur" ?) joue ici un rôle constitutif. Elle se met en quelque sorte en auto-référence : un rationnel approchant un irrationnel est une valeur erronée d'un objet défini par ses valeurs erronées. C'est une source de confusions. Ce n'est pas pour rien qu'il a fallu tant de siècles pour théoriser les irrationnels.

L'erreur comme méthode apparaît dans l'exemple suivant.

> <u>Exemple 6. Paver un rectangle avec des carrés. (Essais et erreurs : l'erreur volontaire.)</u> A des élèves à qui ont veut enseigner le plus grand commun diviseur, on demande de paver avec des carreaux les plus grands possible une cour rectangulaire de 54x42 (en dm). Comme les nombres 54 et 42 ne sont pas trop grands, ils arrivent à trouver le côté du carreau demandé par essais et erreurs. On leur pose ensuite la même question pour une cour de 723x1221, ce qui est un beau terrain (avec ou sans jeu de mot ...) pour conceptualiser le plus grand commun diviseur.

L'erreur est volontaire et élevée à la dignité d'outil de recherche dans la méthode par essais et erreurs. Celle-ci, à défaut d'être glorieuse, possède divers mérites : elle est simple, elle fournit des solutions, elle permet des observations et ainsi sert de tremplin vers une méthode plus élaborée.

4. L'INERTIE DES CONCEPTS.

Beaucoup d'erreurs proviennent de ce qu'une notion intuitive ou un concept plus ou moins élaboré s'essaye à fonctionner dans un contexte auquel il n'est pas adapté. Les concepts résistent en quelque sorte au changement. Ils n'évoluent que sous la pression des erreurs qu'ils provoquent, et encore parfois avec difficulté.

Exemple 7. Dessiner un polygone régulier. (Une notion familière échoue dans une construction.) Soit un élève qui sait très bien discerner à vue un polygone régulier d'un irrégulier. On lui demande de dessiner un pentagone régulier et il produit le polygone de la Fig. 4. Il s'étonne du résultat : il a pourtant respecté l'égalité

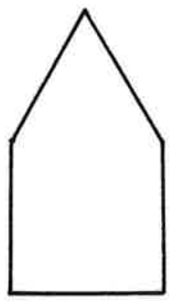

Fig. 4

des côtés! Mais pour faire le projet d'abord et exécuter ensuite le dessin d'un polygone régulier, il faut dépasser l'intuition et disposer d'une caractérisation discursive de l'objet : soit l'égalité des côtés et celle des angles, soit l'égalité des côtés et l'inscriptibilité, soit ...

Voici un exemple où l'absence d'un concept mathématiquement construit (au départ d'une intuition claire) entraîne, non plus une erreur, mais l'impuissance à démontrer.

Exemple 8. Prouver qu'une suite tend vers zéro. (Une vue intuitive ne peut servir à démontrer.) Sur un exemple tel que la suite 1, 1/2, 1/4, 1/8, ... des aires des carrés emboîtés de la Fig. 5, des élèves ont bien saisi intuitivement le sens de la proposition : la suite tend vers 0. On les intéresse alors à la suite des aires des dodécagones emboîtés (Fig. 6), puis des million-gones

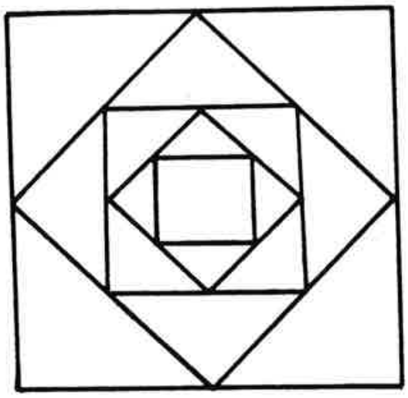

Fig. 5

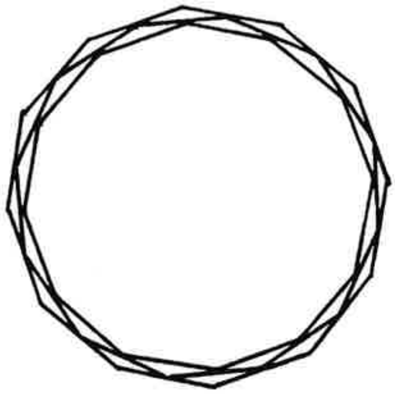

Fig. 6

emboîtés. D'où un doute chez certains : est-ce que a^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini même quand a, inférieur à 1, est très voisin de 1 ? Une démonstration s'impose. La notion intuitive de limite nulle n'y suffira pas, car on ne voit pas comment échapper à des affirmations du type : quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, trouvons un n tel que $a^n < \varepsilon$. Ce qui revient à $(1/a)^n > 1/\varepsilon$. Mais $1/a = 1 + \mu$ pour un certain $\mu > 0$. Et donc

$$(1/a)^n = (1 + \mu)^n > 1 + n\mu.$$

Or $1 + n\mu$ dépasse tout nombre assigné, et en particulier $1/\varepsilon$ (pour autant qu'on accepte l'axiome d'Archimède). Ainsi on voit bien qu'il a fallu construire le concept de limite nulle : "pour tout ε, il existe un n ...", ou quelque chose de ce genre. Pour un traitement détaillé de cet exemple, cf. C. Hauchart (1985), pp. VII-1 à VII-7.

Les Exemples 7 et 8 illustrent un fait important : *il existe des propositions mathématiques dont le sens est clairement saisi, sans ambiguïté, dans le cadre intuitif associé au vocabulaire commun :* tel polygone est *régulier*, telle *suite tend vers 0*. D'autre part, dès qu'on veut construire une figure ou un raisonnement, on bute sur la nécessité d'élaborer mathématiquement une partie au moins des notions intuitives. Pourquoi une partie ? L'Exemple 8 mobilise deux notions : celle de suite et celle de limite. Or la première a passé telle quelle le cap de la démonstration. Il n'aurait servi à rien de définir préalablement une suite comme application des naturels dans les réels. Aucune clarté supplémentaire n'en aurait résulté. L'histoire témoigne par ailleurs de ce que la notion intuitive de suite a servi telle quelle en mathématiques pendant très longtemps. Par exemple le célèbre "Course of modern analysis" de Whittaker et Watson (1952) ne définit pas le concept de suite et commence ainsi la définition de la limite d'une suite : "Soit $z_1, z_2, z_3, \ldots$ une suite infinie (unending) de nombres ..."

Certains concepts mathématiques déjà formés et efficaces sur un champ déterminé de problèmes s'avèrent inadaptés lorsque ce champ s'élargit, d'où des erreurs, des paradoxes, des blocages.

Exemple 9. Les parallèles dans l'espace. (Un concept ne passe pas de 2 à 3 dimensions.) On dit, en géométrie plane, que deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou disjointes. Importée telle quelle dans la géométrie de l'espace, cette définition déraille car elle ignore les droites gauches (c'est-à-dire disjointes et non coplanaires). C'est une méprise commune.

Les exemples de cette sorte abondent dans l'histoire des mathématiques, entre autres lors des passages de 2 à 3 dimensions, ou de 3 à n, ou de n à l'infini. Ainsi la notion de probabilité définie par l'axiomatique "élémentaire" (la probabilité d'un événement, réunion de plusieurs événements élémentaires, est la somme des probabilités de ceux-ci) déraille dans le passage des espaces probabilisés finis aux espaces infinis. Voici un autre exemple, tiré des débuts de l'analyse.

Exemple 10. Une définition sommaire de la limite. (Une définition efficace sur un champ trop étroit.) Dans une classe on étudie un lot de suites toutes positives monotones et de limite nulle (du type a^n pour $o < a < 1$, ou $1/n^k$ pour k entier positif, ou ...). Sur ce chantier de problèmes, la limite nulle d'une suite a_n est définie par

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ n \in N) \text{ tel que } a_n < \varepsilon,$$

et cette définition fonctionne très bien sur le lot d'exemples en question. Mais elle conduit à des démonstrations défectueuses si on l'applique telle quelle à des suites non monotones ou non positives, de limite nulle.

Il faut la corriger en y remplaçant $(\exists\ n \in \mathbb{N})$ par $(\exists\ N \in \mathbb{N})$ $(\forall\ n \geqslant N)$, et a_n par $|a_n|$.

Autres exemples comme il en pleut : le concept de somme étendu des sommes finies au domaine des séries où il provoque des accidents classiques; la notion de déplacement d'un objet borné refusant de se muer, quand il le faudrait pour des démonstrations, en une application de l'espace entier sur lui-même (cf. N. Rouche (1982)); le segment orienté embarrassé dans des démonstrations à défaut d'avoir cédé la place au vecteur libre, etc., etc.

Ainsi donc, les concepts résistent au changement. Qui plus est, la simple rencontre d'une erreur ne suffit pas à en provoquer sur le champ l'adaptation (cf. l'erreur de Cauchy à l'Exemple 1). Ils résistent avec une inertie parfois énorme, dont l'histoire et l'enseignement offrent bien des exemples. Regardons-les nombres : ceux qui peuplent l'imagination et les "démonstrations" des élèves du secondaire (et au delà ?) dépassent rarement le stade des décimaux limités, ou parfois périodiques. Ils survivent longtemps, quand ce n'est pas toujours, aux premières gaucheries et imprécisions dont ils sont cause. C'est que le prix à payer pour les arranger est énorme et que, par ailleurs, ils continuent à fonctionner tels quels, vaille que vaille, dans une brume pas trop épaisse. N. Bourbaki (1960) a bien décrit ces nombres des élèves, mais qui sont aussi des nombres de physiciens, d'ingénieurs ...

Une observation ressort des exemples de cette section : c'est que les concepts sont construits et reconstruits mathématiquement pour servir à démontrer. Les concepts sont des *instruments* pour raisonner et ils ont été façonnés au fil des siècles sur des chantiers de démonstration. Cette idée n'est pas nouvelle : on la trouve clairement dégagée et illustrée par I. Lakatos (1979) qui parle de *proof-generated concepts*, des concepts engendrés par la preuve. Nous reviendrons sur cette idée, capitale dans l'enseignement, de l'instrumentalité des concepts (cf. n°10).

5. COLLUSION DU SIMPLE ET DU VRAI.

L'esprit en recherche est victime, de toutes sortes de façons, de l'illusion de la simplicité. L'erreur par *entraînement analogique* en est une première illustration : on s'imagine trop vite que "c'est pareil". L'exemple suivant est extrait de J. Lubczanski (1986), ouvrage par ailleurs passionnant et dont l'auteur excelle à tirer des erreurs un parti éducatif.

<u>Exemple 11. Quatre forces en un point. (Erreur par entraînement analogique.)</u> Quatre forces égales (en norme)

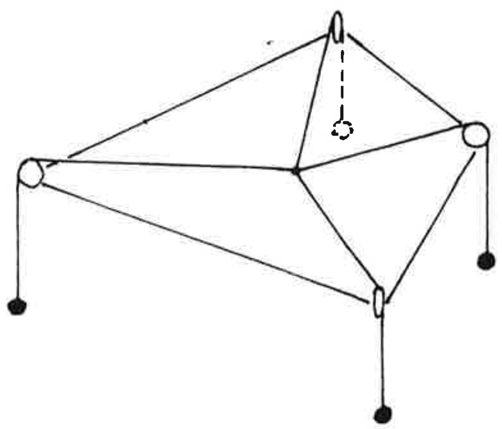

Fig. 7

tirent sur un point P et pointent respectivement vers les quatre sommets d'un quadrilatère quelconque : voir le montage de la Fig. 7 avec quatre ficelles nouées en P, passant sur quatre poulies et supportant quatre poids égaux. On pense que P se stabilise au barycentre des quatre sommets affectés de masses égales. Et de fait la configuration du système rappelle étroitement celle qui mène au barycentre : quatre charges (égales) sur quatre points et une sorte de point moyen. Mais dans l'équation $\vec{GA_1} + \vec{GA_2} + \vec{GA_3} + \vec{GA_4} = \vec{0}$ qui définit le barycentre, les termes ne sont pas égaux en norme.

Dans l'exemple suivant, c'est une idée vague, en l'occurence celle de *régularité*, qui induit un jugement hâtif.

Exemple 12. Tout polygone régulier pave le plan. (Séduction de la régularité.) On demande à des élèves quels sont les polygones réguliers qui pavent le plan. Leur première conjecture, avant tout essai, est souvent que tout polygone régulier pave. Un pavage est une chose très régulière. Comment un polygone régulier ne se marierait-il pas avec l'idée de pavage ?

Lorsqu'il est question de conjecturer la nature d'une fonction, l'attention se porte presque toujours, dans un premier temps, vers une fonction linéaire : la proportionnalité est bien la dépendance la plus simple. C'est ainsi que, abordant la similitude, beaucoup d'élèves pensent que si on multiplie par deux les dimensions linéaires d'une figure, son aire est multipliée par deux. L'*illusion de proportionnalité* est trop connue pour qu'il soit utile de l'illustrer davantage.

Nous avons expliqué au n° 1 comment le *Principe de continuité* avait provoqué, parmi d'autres accidents, le théorème de Cauchy sur la limite d'une suite de fonctions continues. Après de tels démentis, ce principe n'est évidemment plus invoqué par les mathématiciens. Mais l'idée qu'il exprime, une forme d'induction du fini à l'infini, ne cessera pas de si tôt d'engendrer des erreurs. Un seul exemple suffira : la croyance qu'une série convergente de fonctions dérivables est dérivable, et qu'en la dérivant terme à terme on obtient la dérivée de la limite.

Une autre façon de penser, commune chez les mathématiciens et les élèves, a aussi pris dans l'histoire la forme d'un principe, le *Principe de raison suffisante*. Leibniz en a donné plusieurs énoncés, parmi lesquels le suivant : "Aucun fait ne saurait se trouver vrai ou existant, aucune énonciation véritable, sans qu'il y ait une raison suffisante pourquoi il en soit ainsi et non autrement". (Cité par A. Lalande (1951), p.1223). L'idée exprimée par ce principe est à l'oeuvre le plus souvent dans des problèmes dont les données présentent quelque symétrie : on ne voit pas pourquoi la symétrie des données n'entraînerait pas la symétrie des solutions (ce qui cache habituellement, dans le cas des problèmes de géométrie, une hypothèse d'homogénéité ou d'isotropie de l'espace). Cette conviction produit sans doute plus de vérités que d'erreurs. En voici deux exemples (ici donc et par exception dans notre suite d'exemples, il est question de propositions vraies).

Exemple 13. Du centre d'un cercle au milieu d'une corde. (La symétrie suffit à prouver.) Certains élèves n'ont pas besoin d'invoquer d'autre argument que la symétrie pour se convaincre que si on joint le centre d'un cercle au milieu d'un corde, le segment obtenu est perpendiculaire à la corde.

Exemple 14. Les angles d'un triangle isocèle. (Prouver par un mouvement symétrique.) Voici comment Clairaut (1753) démontrait aux débutants l'égalité des angles d'un triangle isocèle. "(...) si on se représente ce qui arriverait, en supposant que les côtés AB, AC, du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur BD, et sur CE, prolongements de la base BC, et qu'ensuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité

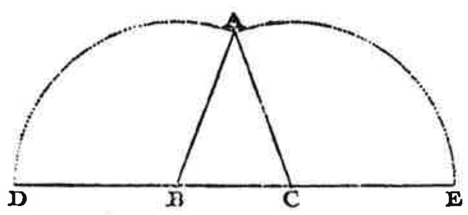

Fig. 8

de ces deux côtés les empêcherait de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pencheraient également sur la base BC. Donc l'angle ABC serait égal à l'angle ACB."

Les inductions par symétrie ne sont pas toutes vraies. Voici un exemple de symétrie fallacieuse.

Exemple 15. Une masse fluide en rotation. (Une symétrie fallacieuse.) Un problème classique de mécanique consiste à chercher les figures d'équilibre relatif que peut prendre une masse fluide en rotation uniforme autour d'un axe. De Newton à Laplace, en passant par Mac-Laurin, Pascal et Legendre, tout le monde avait considéré des figures d'équilibre de révolution. "On s'était habitué" écrit Poincaré (cité par Dugas (1940)) "à regarder comme évident que toutes les formes d'équilibre devaient être des surfaces de révolution." Jusqu'en 1834 quand Jacobi exhiba un ellipsoïde à trois axes inégaux tournant autour de son plus petit axe. "Ce résultat de Jacobi causa un très grand étonnement." (Poincaré, ibid.) Les yeux des chercheurs en furent dessillés : à dater de ce moment, ils trouvèrent bien d'autres solutions non symétriques. (Cf. R. Dugas, ibid.).

Ainsi la collusion du simple et du vrai passe, parfois, par des énoncés généraux tels que le principe de continuité et le principe de raison suffisante. Si, comme ce dernier, ils induisent beaucoup plus de vérités que d'erreurs, alors les rares erreurs qu'ils provoquent sont particulièrement instructives, car invraisemblables. Faut-il rejeter sans plus de tels principes parce qu'ils produisent des erreurs ? Ce serait faire bon marché du fait qu'ils produisent aussi des vérités. Ils sont sources de conjectures, ce qui est utile. Il ne faut pas les rejeter comme faux. Il faut les garder comme féconds, s'en servir et s'en méfier à la fois. En particulier, on peut entraîner les élèves à détecter les symétries, ce qui est difficile pour beaucoup, et à en tirer sinon des preuves, au moins des arguments.

La collusion du simple et du vrai est inhérente aux mathématiques. On considère souvent comme un indice de vérité que dans un problème tout se mette bien à la fin, que les choses s'arrangent. Plus profondément encore, la simplicité, l'élégance sont un objectif. Est-ce F. Klein qui disait qu'une question mathématique ne peut être considérée comme vraiment résolue tant qu'elle n'a pas été trivialisée ? Il reste que la simplicité n'est pas la vérité.

6. UN ENVIRONNEMENT PIEGE.

Une autre source d'erreurs mathématiques réside dans les pièges de la perception. Beaucoup de ceux-ci peuvent être interprétés en psychologie de la forme et de ce fait être rattachés à des catégories de phénomènes perceptifs débordant largement le cadre de l'activité mathématique. Sur la psychologie de la forme en général, cf. W. Koehler (1944) et P. Guillaume (1979). Sur les effets de psychologie de la forme dans l'activité mathématique, voir M. Wertheimer (1945) et l'aperçu donné par G. Glaeser (1982).

Exemple 16. Repérer des centres ou axes de symétrie. (L'effet de la prégnance.) Quand on cherche les symétries du pavage de la Fig. 9(a), on repère d'abord les centres de symétrie qui se trouvent en un noeud du pavage, car ceux-ci sont des points privilégiés du plan et attirent le regard : ils sont *prégnants* comme on dit en psychologie de la forme. On repère plus malaisément les centres de symétrie qui se trouvent au milieu d'une arête du pavage, précisément parce que rien de particulier n'y attire le regard.
C'est pour une raison analogue que l'on repère immédiatement, dans un tétraèdre régulier (Fig. 9(b)) les axes de symétrie d'ordre 3 qui passent par un sommet et le milieu de la face opposée, et beaucoup plus difficilement les axes de symétrie d'ordre 2 qui passent par les centres de deux arêtes opposées.

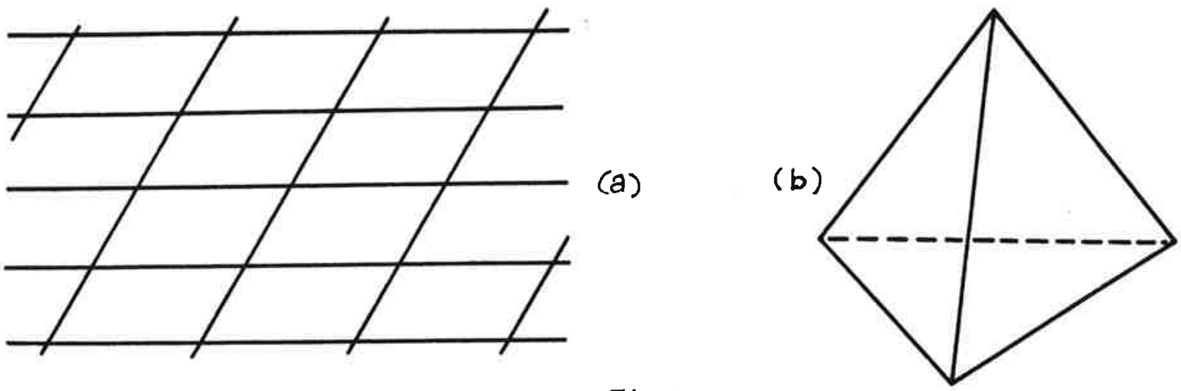

Fig. 9

La géométrie de l'espace se travaille nécessairement sur des représentations en projection, et donc ambiguës. Toute figure de ce type doit être interprétée, associée univoquement à la situation spatiale en cause. Beaucoup de quiproquos viennent de là. Il s'agit de phénomènes bien connus, souvent explicables par la loi dite *de la bonne forme* : une figure est interprétée de la façon qui lui attribue la forme la plus simple, la plus régulière. Par exemple, si la Fig. 10(a) représente un cube en projection parallèle, et si on dessine la diagonale uv comme à la Fig. 10(b), l'alignement des segments uv et vw sur le dessin fait qu'on a tendance à les percevoir comme alignés dans l'espace et qu'on ne sait trop si on parle de la diagonale du cube ou de celle de sa face arrière. De telles interprétations maladroites sont sources de nombreuses erreurs de raisonnement.

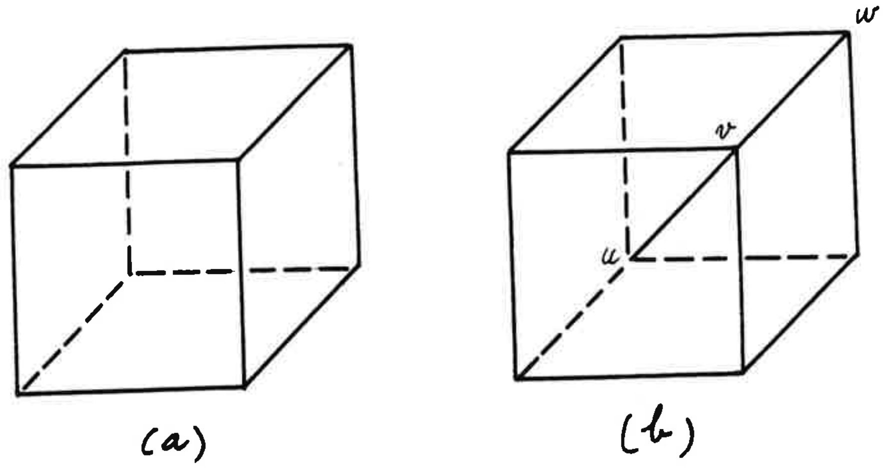

Fig. 10

Exemple 17. Le rôle pivot de 1/2. (Influence d'une forme de la pensée spontanée.) Si d'une grandeur on retire au moins la moitié, et de ce qui reste au moins la moitié, et de ce qui reste ... et ainsi de suite, les restes successifs tendent vers 0. Ceci est évident pour tout le monde. Supposons ensuite qu'on retire de la grandeur une fraction a < 1/2, puis de ce qui reste la même fraction a, et ainsi de suite. Alors il devient difficile pour certaines personnes de croire que la suite des restes tend vers 0 (surtout si a est très proche de 0).

Le rôle pivot de la valeur 1/2 dans cette question vient sans doute de ce que sa position symétrique entre 1 et 0 la désigne comme frontière naturelle entre ce qui diminue vite et ce qui diminue lentement. A quoi s'ajoute peut-être la fréquence des partages en deux moitiés dans la vie quotidienne : 1/2 est la première fraction et la plus imprégnée dans l'esprit des hommes. Sur le rôle pivot de 1/2, et aussi de 2, cf. C. Hauchart (1985).

Il arrive souvent que des élèves assimilent incomplètement le concept de symétrie orthogonale en géométrie plane. En particulier si l'axe de la symétrie est dessiné parallèle aux bords gauche et droit de la feuille, ils pensent que le demi-plan de gauche est envoyé sur celui de droite, oubliant que celui-ci est envoyé sur celui de gauche. Ce qui joue ici est sans doute la prégnance du mouvement naturel de gauche à droite qui est celui de la lecture; peut être aussi l'image du miroir qu'on associe volontiers à la symétrie orthogonale et qui la désymétrise mentalement (l'objet qui est devant un miroir a un reflet, mais le reflet n'a pas de reflet).

On pourrait croire qu'une personne ayant bien assimilé et longuement utilisé le concept de symétrie orthogonale ne fera plus ce type d'erreur. Pourtant, de nombreux mathématiciens formés glissent sur la question suivante.

Exemple 18. Une arête plus ou moins symétrique. (Le piège du sens gauche-droite.) On demande si le motif en forme d'arête de la Fig. 11 supposé prolongé indéfiniment aux

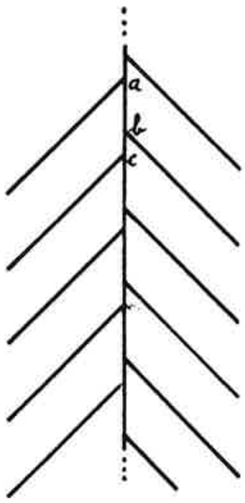

Fig. 11

deux bouts est invariant pour une symétrie glissée, c'est-à-dire la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation de direction parallèle à l'axe de la symétrie. La plupart des personnes interrogées répondent "oui", imaginant que la gauche de l'arête est envoyée sur la droite, puis translatée de ab, et oubliant qu'en même temps la droite de l'arête est envoyée sur la gauche ... et qu'il faudrait la translater de bc $\neq$ ab.

Cet exemple montre qu'un piège banal (se laisser fasciner par le sens gauche-droite) et qu'on peut croire avoir déjoué définitivement, rejoue efficacement lorsqu'il est dissimulé dans une situation problématique tant soit peu absorbante : on ne voit pas le piège dans les hautes herbes. En voici un autre exemple où il provoque une démonstration gravement lacunaire.

Exemple 20. La composée de deux translations. (Le piège du sens gauche-droite : laisser échapper de nombreux cas de figure.) Pour démontrer que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation, on dessine la Fig. 12 et on observe qu'un point quelconque a est envoyé sur a', puis a' est envoyé sur a". Donc a est

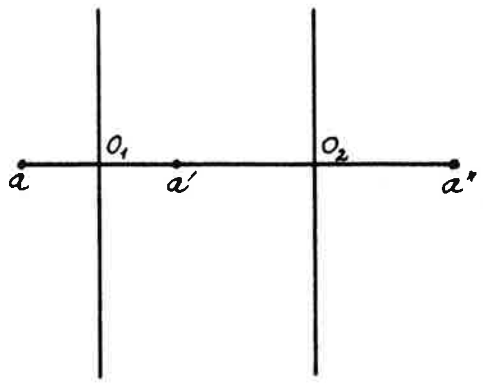

Fig. 12

transporté vers la droite sur une distance

$$d(a,a') + d(a',a") = 2\ [d(o_1,a') + d(a',o_2) = 2\ d(o_1,o_2).$$

Comme cette dernière distance ne dépend pas de a, on en conclut que tout point a avance de même. En raisonnant ainsi, on ne voit pas que le point a n'est pas si quelconque que cela, et on omet les nombreux cas de figure où le point origine parcourt des distances tout autre, aussi bien de droite à gauche que de gauche à droite (cf. Fig.13).

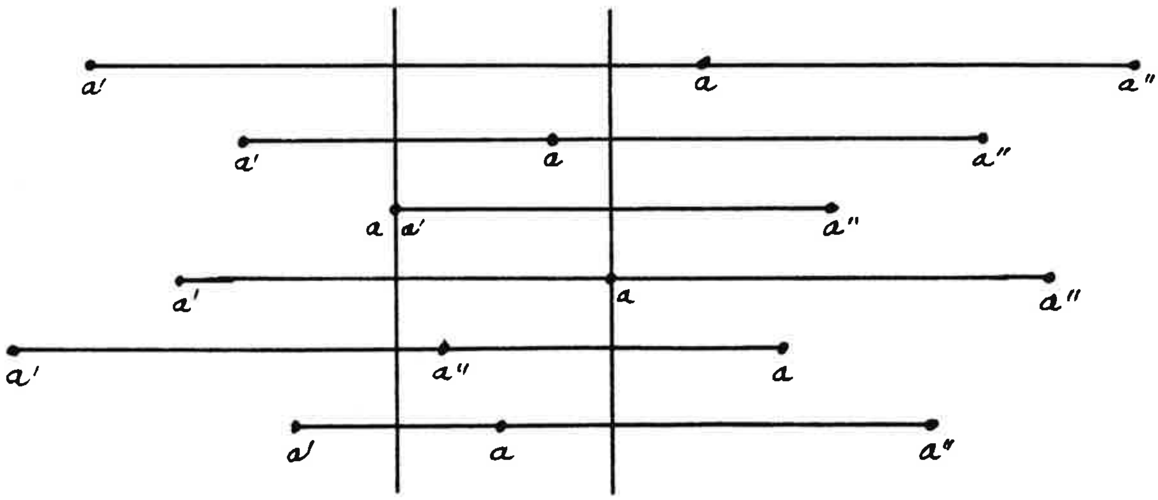

Fig. 13

Si, comme il se doit, on prend ces cas en compte, la démonstration s'appuyant sur les distances devient extrêmement lourde. Par contre, elle retrouve son élégance si on y emploie les vecteurs et la relation de Chasles.

Dans cet exemple, ce qui est prégnant, c'est-à-dire ce qui attire l'attention, c'est un cas de figure qui fait oublier tous les autres. Le résultat est une démonstration insuffisante d'un théorème vrai. Ce qui est prégnant dans l'exemple suivant, c'est une multitude de cas de figure, ce qui fait qu'on en oublie un, mais important au point que le résultat est un énoncé faux.

Exemple 21. La composée de deux rotations. (Laisser échapper un cas de figure "limite".) On conjecture que la composée de deux rotations planes (de centres distincts) est une rotation. Mais si la somme des angles des deux rotations vaut 360°, alors la composée est une translation. Il suffisait d'y penser !

Il arrive souvent que ce que l'on perçoit - et le jugement que l'on porte - dépende non seulement des circonstances présentes, mais encore d'une expérience passée, éventuellement proche. C'est ce qu'illustre joliment l'exemple suivant, cher à E. Castelnuovo (1980). Sur l'effet d'hystérèse, voir aussi G. Glaeser (1982).

Exemple 22. L'aire du parallélogramme. (Un effet d'hystérèse.) On montre à de jeunes élèves un rectangle fait de barres articulées. Puis on le déforme légèrement (cf. Fig. 14) et on demande quelle est l'aire du parallélogramme obtenu. Beaucoup d'élèves répondent : "la même

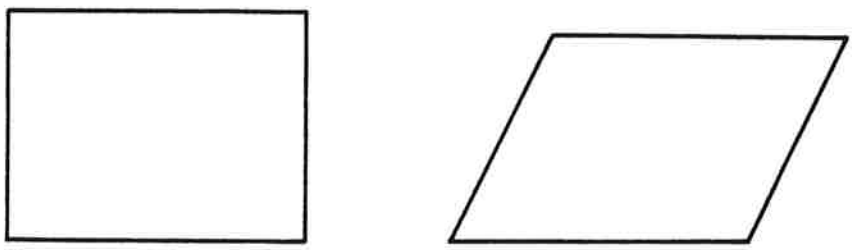

Fig. 14

que celle du rectangle". On continue à montrer des parallélogrammes de plus en plus inclinés. La décroissance de l'aire devient évidente à des moments variables selon les élèves. L'expérience conduite dans l'ordre inverse se passe tout autrement : l'illusion attribuant au parallélogramme la même aire qu'au rectangle ou bien n'apparaît pas, ou bien apparaît plus tardivement.

La combinatoire a ses difficultés propres. On doit y regrouper des choses pour les dénombrer, mais pour beaucoup de problèmes il y a divers regroupements possibles et utiles. La perception peut être soit bloquée sur une façon de compter, éventuellement incomplète et imperméable à d'autres façons, soit instable, sautant subrepticement d'une façon à une autre.

Exemple 23. Dénombrer les arêtes d'un polyèdre. On demande à des élèves de dénombrer les arêtes d'un icosaèdre. Ils commencent judicieusement par compter les faces, parce que c'est plus simple, puis multiplient le nombre obtenu par 3, oubliant que chaque arête est commune à deux faces et qu'il faut donc encore diviser le résultat par 2.

Cet exemple est fort simple, et il serait bien utile d'en analyser davantage et de plus évolués, tant sont profondes et spécifiques les difficultés de la combinatoire. Nous n'aurons pas le loisir de le faire ici.

7. L'INFINI, LE TEMPS, LE LANGAGE, ...

Le présent exposé est une esquisse : il n'épuisera pas les points de vue possibles et instructifs sur les erreurs. Avant de passer à la difficulté d'entrer dans le jeu du mathématicien (section 8) et ensuite aux erreurs engendrées par les structures et les habitudes scolaires (section 8), attirons au moins l'attention sur les erreurs spécifiques provoquées par la présence de l'infini. Nous en avons déjà rencontré avec le théorème faux de Cauchy (Exemple 1.), la construction par étapes du concept de limite d'une suite (Exemples 8. et 10.) et le rôle pivot de la valeur 1/2 (Exemple 17.). Ce type de difficultés a déjà été étudié entre autres par C. Hauchart [1985] . En voici un nouvel exemple, où le temps de la cinématique se mêle dans l'esprit au temps du parcours mental d'une suite infinie.

[Confusion du temps du discours et du temps du parcours.]

Exemple 23. La dichotomie. Pour franchir telle distance, je dois d'abord en franchir la moitié, puis la moitié de ce qui reste, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite. Il y a une infinité d'étapes, je n'arriverai *jamais*. La suite, il est vrai, ne s'arrête jamais, car l'énumération de ses termes est inépuisable : c'est le jamais au temps du discours, de l'énonciation. Il glisse vers le *jamais* au temps du parcours, sans doute parce qu'il est difficile - on peut le vérifier par ailleurs - d'imaginer l'infinie divisibilité du temps. Le segment à parcourir est donné au départ et son infinie divisibilité est acceptée sans trop de peine : on peut toujours diviser en deux un objet donné. Le temps du parcours, lui, n'est pas donné. Il faut le construire, et on a de la peine à loger une infinité d'étapes dans un temps fini, fut-il long. Il est encore plus difficile de loger une infinité d'étapes dans un intervalle de temps arbitrairement petit, comme le montre l'énoncé "inversé" de la dichotomie : pour franchir telle distance, je dois d'abord en franchir la moitié, mais auparavant je dois franchir la moitié de la moitié, etc. Ici le temps du discours remonte le temps du parcours.

La dichotomie est une expérience de pensée, ce qui permet à certains de la ranger parmi les spéculations futiles. Tout autre est l'effet de la balle de ping-pong de notre Exemple 2., objet d'une expérience tout court s'inscrivant dans un temps bien réel.

[Difficulté des durées infiniment petites.]

Exemple 24. La balle ne s'arrête pas. Dans le modèle mathématique d'une balle qui rebondit à chaque coup aux deux tiers de sa hauteur précédente, le nombre de rebonds est infini. "Donc la balle ne s'arrête jamais". Exceptionnels sont ceux, même mathématiciens, qui échappent à cette illusion première. Illusion car la suite des temps des rebonds est une suite géométrique de somme finie.

L'exemple suivant est typique des pièges de ce qu'on appelle les formes indéterminées.

Exemple 25. L'asymptote translatée. (L'infini n'est pas un nombre.) La fonction

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{x+1}\right)^{1/2}$$

égale $x\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/2}$ pour $x > 0$. Or $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/2}$ s'approche de 1 quand x grandit. Donc la fonction f se comporte comme x pour x grand. Et par conséquent, disent des élèves,

elle admet pour asymptote la droite d'équation $y = x$.
L'erreur vient de ce que $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ n'entraîne pas, comme on aurait tendance à le croire, que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = 0$.

Enfin, comme le montre l'exemple suivant, bien rares sont ceux qui ont acquis une intuition sans défaut de l'infini en analyse élémentaire.

Exemple 26. Quand la dérivée tend vers une limite. (Même dénoncé, le principe de continuité fait encore des dégâts.) "Si la dérivée f' d'une fonction f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) a une asymptote horizontale, alors f a une asymptote de pente indiquée par l'asymptote horizontale de f'." Rares sont ceux qui, consultant leur intuition, ne souscrivent pas à cette proposition. Celle-ci admet pourtant le contre-exemple $f(x) = \ln x$ pour une dérivée f' tendant vers 0, et le contre-exemple $ax + \ln x$ pour f' tendant vers $a \neq 0$. Dans un premier temps, on ne songe pas au cas particulier de la dérivée tendant vers 0. On se dit que si le taux de croissance de f tend vers c, alors le graphe de f considéré pour des x très très grands ne diffère que de façon négligeable du graphe d'une fonction ayant c pour taux de croissance. Le contre-exemple détrompe, mais ne convainc qu'à moitié : il reste une perplexité. On reconnaît dans cette illusion insidieuse une intuition parente de celle qu'exprime le principe de continuité. Une dérivée qui tend vers une limite sans l'atteindre n'a pas le même effet qu'une dérivée qui atteint sa limite et y demeure.

8. ENTRER DANS LE JEU DU MATHEMATICIEN.

Comme nous l'avons écrit à la Section 2, les débutants distinguent mal les propositions mathématiques de celles portant sur la réalité. D'où des confusions. Mais même quand l'activité mentale arrive à s'exercer sur les objets mathématiques à proprement parler, elle n'est pas nécessairement guidée, chez les débutants toujours, par la vigilance épistémologique que les mathématiciens puisent dans leur expérience des aléas de la recherche. Voici un premier exemple montrant des contradictions qui tardent à venir à la conscience.

Exemple 27. Manque d'esprit de suite. [Des contradictions non clairement perçues]. Des élèves abordent les suites par quelques exemples de suites géométriques positives décroissantes telles que celles des Exemples 2, 8, 17, 23 et 24. Avant d'arriver à une vue globale à peu près claire des phénomènes en jeu, leur pensée oscille selon les moments entre des perceptions contradictoires. Mais, étant à tout instant absorbés par une vue locale des choses, ils ne réalisent pas les contradictions. Par exemple, ils admettent qu'une suite est infinie, ce qui ne les empêche pas de dire un peu plus tard : "On enlève toujours quelque chose, donc le processus est fini." Ou encore : "On enlève toujours quelque chose, donc ça tend vers zéro", et peu après : "On enlève chaque fois de moins en moins, donc ça ne peut tendre vers zéro."

Cette forme de confusion mentale peut être rapprochée, *mutatis mutandis*, de la pensée syncrétique (cf. C. Hauchart [1985]). Elle n'est, à vrai dire, pas propre aux débutants. En effet, tout mathématicien abordant une question nouvelle quelque peu ample passe, avant d'en avoir intégré mentalement les diverses facettes, par des perceptions sommaires et contradictoires. Ce qui le distingue du débutant n'est que le projet plus ferme de réduire ces difficultés et la dextérité pour le faire.

D'autres confusions communes, dont il serait intéressant d'étudier les modalités, consistent à utiliser dans une démonstration soit la thèse plus ou moins dissimulée, soit une hypothèse non présente dans l'énoncé. Confusions déjà plus subtiles que celles de l'Exemple 27, qui étaient de simples contradictions (coexistence de propositions incompatibles), car elles interviennent sur un chantier de démonstration éventuellement encombré de beaucoup d'idées et de relations.

Une autre aventure commune consiste à croire trop vite qu'une condition nécessaire est aussi suffisante.

Exemple 28. Paver le plan avec des pentagones et décagones. [Une condition nécessaire prise pour suffisante]. Lorsque quelques polygones réguliers disposés autour d'un point y remplissent exactement 360°, cette amorce de pavage est si satisfaisante, "elle se met si bien" qu'elle donne confiance. Beaucoup croient (et c'est souvent le cas) qu'elle peut être prolongée en un pavage du plan entier (il s'agit d'un pavage semi-régulier, c'est-à-dire tel que chaque noeud y est entouré des mêmes polygones dans le même ordre.) On est alors étonné de découvrir l'impossibilité de paver semi-régulièrement le plan avec des pentagones et décagones (cf. Fig. 15).

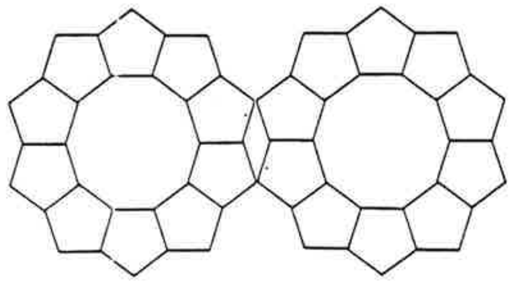

Fig. 15

Cet exemple doit être rapproché de l'Exemple 21. Dans les deux cas, il s'agit d'une *conjecture fausse à contre-exemples statistiquement rares*. Dans ce genre de situation, la différence entre un mathématicien et un débutant est que la conviction de ce dernier sera conjecture chez le premier. Une même proposition est une erreur ou une conjecture selon la méfiance épistémologique de celui qui l'énonce.

Entrer dans le jeu du mathématicien n'est pas chose naturelle, du fait que dans le vie quotidienne on ne démontre pas. Nous avons vu, avec l'aventure du théorème faux de Cauchy (Exemple 1.), le temps qu'il a fallu dans l'histoire pour instaurer la règle de méthode qui veut qu'on cherche l'erreur dans la preuve dès qu'on dispose d'un contre-exemple. Les élève d'aujourd'hui réagissent souvent comme des mathématiciens de 1820 : ils admettent volontiers qu'un théorème souffre des exceptions. Ne dit-on pas d'ailleurs que l'exception confirme la règle ?

Le jeu du mathématicien, c'est aussi construire des systèmes déductifs. Or il arrive à des élèves, sans transgresser du tout la logique, de ne pas très bien savoir, ou pas encore, dans quel système ils se trouvent.

Exemple 29. Le théorème de Pythagore est faux ! [Confusion sur le statut des axiomes] . Faisant l'hypothèse qu'il existe une commune mesure entre le côté et la diagonale d'un carré, on désigne par m et n les nombres de fois que cette mesure va respectivement dans l'un et l'autre? On tire alors du théorème de Pythagore que

$$n^2 = 2\ m^2.$$

On montre ensuite par un argument classique que cette égalité engendre une contradiction. C'est donc, dit le professeur, qu'on a admis quelque chose de faux. Bien, disent certains élèves, le théorème de Pythagore est donc faux. Et à vrai dire, il faut bien voir au nom de quoi on l'a imposé.

Construire un système déductif en l'accrochant à des axiomes en petit nombre amène à la pratique anti-naturelle de démontrer des évidences. La locution même "démontrer des évidences" est contradictoire au sens de la langue commune, puisque "démontrer", tous les dictionnaires en font foi, c'est amener à l'évidence (par un raisonnement). D'où de multiples erreurs consistant, chez les mathématiciens, à laisser par inadvertance se glisser une proposition (évidente) non "démontrée" dans un système axiomatique, et chez les débutants à refuser de "démontrer" des évidences, du fait qu'ils n'ont pas compris le projet d'un système axiomatique et le sens original du verbe "démontrer" dans ce cadre.

9. LES ERREURS QUI N'ARRIVENT QUE DANS LES ECOLES.

Les erreurs analysées jusqu'ici sont inhérentes à la réflexion mathématique. Certaines sont plutôt le fait des débutants. On les trouve partout où une telle réflexion se produit, et en particulier dans les écoles. Mais il y a aussi des erreurs qui ne se produisent que dans les écoles, là où des professeurs s'efforcent de transmettre des connaissances.

Qui pense *erreurs* dans ce cadre évoque souvent les erreurs de calcul numérique ou algébrique. Celles-ci peuvent résulter de la distraction ou de la précipitation du calculateur, et dans ce cas, elles ne sont pas propres à l'école. Mais souvent elles proviennent d'un largage de sens chez des élèves astreints à des calculs d'entraînement, sans référence à un contexte où le résultat du calcul serait attendu. Il s'agit alors de manquements aveugles à des règles perçues comme arbitraires. Ces divagations dans l'absence de sens (que, parmi d'autres, S. Baruk [1973], [1977], [1985] a beaucoup étudiées) n'existent que parce que des élèves qui ne suivent plus sont obligés d'essayer de suivre et de faire, quand on les interroge, comme s'ils suivaient : ils battent l'air en vain.

Mais les erreurs de calcul de ce type ne sont pas les seules qui n'existent que par l'enseignement et la pratique des interrogations. On peut y ajouter le fait de ne pas comprendre la question posée (le sens n'a pas le temps de s'établir), le trou de mémoire, la volonté d'utiliser toutes les données d'un énoncé (parce que les énoncés sont habituellement rédigés pour cela), le refus d'une réponse qui "ne tombe pas juste" (parce que les énoncés sont faits pour produire des nombres ronds), l'acceptation d'une réponse numérique dont l'ordre de grandeur est fantaisiste (parce que de toutes façons les mathématiques nous ont habitués à ces délires intellectuels, ...), d'autres encore qu'on voit fleurir dans les situations où des élèves ne se posent pas de question, mais où on leur en pose, et où ils essayent de satisfaire le professeur (ce qui est un projet éminemment légitime).

De ce lot d'erreurs beaucoup étudiées par ailleurs, tirons-en une qui semble méconnue et qu'illustre l'exemple suivant.

Exemple 30. Classer des quadrilatères. [Ne pas arriver à dégager un concept mathématique] . On demande à des élèves de classer un ensemble de quadrilatères. Ils n'arrivent pas *spontanément* à dire qu'un rectangle est un parallélogramme, qu'un carré est un losange, qu'un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme sont des trapèzes. C'est que, dans la vie quotidienne, on désigne (heureusement) les objets par les noms qui les caractérisent le mieux, et qu'il ne viendrait à l'idée de personne d'appeler un rectangle *parallélogramme*. La phrase "un rectangle est un parallélogramme" est une phrase de mathématicien, destinée à servir dans un raisonnement.

Ce type d'erreur est engendré par une sorte d'*illusion essentialiste* du professeur. Celui-ci veut enseigner un concept. Dans son idée, la définition décrit l'essence de la chose, et il lui paraît naturel et possible de la faire dégager par les élèves d'un lot d'exemples et de contre-exemples. Mais la question se mue en devinette, dans la mesure où la définition est un instrument en quelque sorte artificiel, conçu pour fonctionner commodément dans des démonstrations. La plupart des concepts mathématiques sont du type "proof-generated" (cf. Section 1 et la fin de la Section 4) et il paraît illusoire de les faire retrouver en dehors des chantiers de preuve sur lesquels ils ont été forgés, ou de chantiers analogues.

L'illusion essentialiste est plus répandue qu'on ne le penserait à première vue. N'est-ce pas elle qui a sous-tendu la tentative naïve des promoteurs des "maths modernes" d'amener les élèves à "dégager" les grandes structures de base des mathématiques d'observations et de manipulations simples ? Or ces structures sont des objets longuement façonnés sur de multiples chantiers de preuves. Ils sont "proof-generated" s'il en fut. De même, n'est-ce pas, chez certains professeurs, la croyance que les définitions disent l'essence des choses (des choses qu'on pourrait découvrir en cherchant bien) qui leur fait demander, ce qu'on entend parfois, si telle définition est vraie ?

10. IL Y A ERREUR ET ERREUR.

Répétons que la présente étude est une esquisse et pas davantage. Il serait intéressant d'approfondir, pour les éprouver, les points de vue que nous avons dégagés pour analyser les erreurs. Il faudrait aussi en décrire d'autres. En particulier nous n'avons qu'effleuré (cf. Exemples 23 et 24) les pièges du langage, pourtant nombreux. Sur ceux-ci, mentionnons au moins la contribution essentielle de R. Thom [1970] .

Par ailleurs, ce n'est pas un hasard si nous n'avons consacré que peu de place aux erreurs stériles, celles qui se produisent dans un univers de pensée insuffisamment nourri de sens. Apprendre les bases de la géométrie, de l'algèbre et de l'analyse est une entreprise difficile. Les élèves doivent conceptualiser (s'approprier des concepts) à un rythme extrêmement soutenu, stupéfiant par rapport au rythme historique. Il faut leur éviter les pertes de temps, et donc les amener à faire des erreurs fertiles, contribuant positivement à l'élaboration de leur savoir.

Mais qu'est-ce au juste qu'une erreur stérile ? Et une erreur fertile ? C'est une question de sens, et nous distinguerons schématiquement trois niveaux.

Il y a d'abord l'univers de sens "parallèle", où l'élève répond "à côté" des questions, au hasard d'associations mentales débridées.

Puis viennent les erreurs par rapport à la théorie envisagée dans son déroulement purement déductif (et donc à l'écart des applications qu'elle a vocation d'éclairer). Dans ce cadre, et tant que l'apprenti ne domine pas la théorie, n'en saisit pas la structure d'ensemble et les articulations clés, les erreurs sont des manquements à la vérité du professeur (lui connaît bien la théorie) et non des glissements à l'intérieur du domaine de sens de l'élève. Sans être totalement stériles, ces erreurs ne produisent guère d'organisation personnelle de la pensée.

Enfin il y a les erreurs fertiles, celles que l'élève rencontre en essayant de construire des réponses à des questions qu'il se pose, de démontrer ou d'infirmer des propositions dont il doute. Des erreurs qui obligent à conceptualiser (avec l'aide du professeur le plus souvent) pour pouvoir raisonner, qui induisent des "proof-generated concepts". Comme dit S. Baruk, l'erreur et la vérité ont le même statut pour celui qui cherche, ce qui fait que l'erreur est toujours cachée quand elle arrive. L'erreur fertile est celle qui provoque, par elle-même, sans autre intervention du professeur, un accident sur le terrain de la recherche (plutôt que sur une copie d'examen).

Ceci dit, est-ce qu'enseigner les mathématiques peut se ramener à programmer des erreurs fertiles sur le terrain des élèves, pour les aider ensuite à les surmonter ? C'est une idée séduisante [4]. Mais elle appelle deux observations sur sa mise en pratique. D'abord, si une erreur provoque des dégâts longtemps après être arrivée, les élèves peuvent avoir trop de peine à en repérer la cause : il faut les aider à comprendre l'accident. Ainsi une erreur potentiellement fertile débouche sur une frustration. Par ailleurs, il arrive qu'une erreur soit détectée sur le champ, mais soit trop difficile à réparer. Ainsi en va-t-il souvent des paradoxes. Le simple énoncé du paradoxe d'Achille donne l'irrépressible sentiment que quelque chose ne va pas. Mais quoi ? Des élèves trop jeunes s'y perdent sans profit.

Ces dernières remarques touchant la détection des erreurs et les difficultés qu'elles soulèvent ne sont, au passage, qu'un échantillon de tous les autres points de vue possibles et utiles sur les erreurs. Le sujet est infini ...

---

[4] Mais ce n'est pas une idée reçue. Il y a même un système d'enseignement entièrement fondé sur l'idée d'éviter toute erreur : dans l'enseignement programmé dit linéaire (c'est-à-dire sans boucles latérales), la suite des questions est mise au point par ajustements successifs pour que les élèves ne fassent aucun faux pas, comprennent tout, tout de suite (ce qui peut paraître comme un idéal !).

BIBLIOGRAPHIE

S. BARUK, *Echec et maths*, Seuil, Paris, 1973.

S. BARUK, *Fabrice ou l'école des mathématiques*, Seuil, Paris 1977.

S. BARUK, *L'âge du capitaine*, Seuil, Paris, 1985.

N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960.

P. BOURDIEU, J.-CL. CHAMBOREDON, J.-Cl. PASSERON, *Le métier de sociologue*, Mouton, Berlin, 4ème éd., 1983.

C.L. BOYER, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover, New York, 1949.

E. CASTELNUOVO, *La mathématique dans la réalité*, CEDIC, Paris, 1980.

A.L. CAUCHY, *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, de Bure, Paris, 1821.

A.-C. CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, David, Paris, 1753; nouv. éd. Siloë, Laval, 1987.

I. DOUBNOV, *Erreurs dans les démonstrations géométriques*, Mir, Moscou, 1974

R. DUGAS, *Essai sur l'incompréhension mathématique*, Vuibert, Paris, 1940.

G. GLAESER, *Aspects gestaltistes de la résolution des problèmes*, Colloque Intern. Enseign. Géom., G. NOEL ed., Mons, 1982.

Groupe d'Enseignement Mathématique, *Fouetter un chat avec une droite*, G.E.M., Louvain-la-Neuve, 1981.

P. GUILLAUME, *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris, 1979.

C. HAUCHART, *Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite*, Thèse doct., Louvain-la-Neuve, 1985.

W. KOEHLER, *Psychologie de la forme*, Gallimard, Paris, 1964.

I. LAKATOS, *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, rééd. 1979

A. LALANDE, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Universitaires de France, Paris, 1951.

M. LECAT, *Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours*, Castaigne, Bruxelles, 1935.

J.-M. LEVY-LEBLOND, *L'esprit de sel*, Seuil, Paris, rééd. 1984.

J. LUBCZANSKI, *Comment réussir le triangle quelconque ... et douze autres friandises*, CEDIC, Paris, 1986.

N. MILHAUD, *Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves*, 49 p., Mémoire de D.E.A., Univ. de Bordeaux, 1980.

N. ROUCHE et coll., *L'Archipel des isométries*, G.E.M., Louvain-la-Neuve, 1982.

R. THOM, *Les mathématiques "modernes" : une erreur pédagogique et philosophique*, L'Age de la Science, 3 (1970), 225-242.

P. VEYNE, *Comment on écrit l'histoire*, Seuil, Paris, 1971.

L. VIENNOT, *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Hermann, Paris, 1979.

M. WERTHEIMER, *Productive thinking*, Harper & Brothers, New York, 1945.

E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, 4ème ed., 1952.

REMERCIEMENTS

A l'occasion de la préparation de cette étude, plusieurs personnes m'ont aimablement raconté des erreurs. Celles-ci n'y sont pas toutes reprises, mais toutes ont aidé à la faire. Merci en particulier à M.-L. Bolle, J. Bretton, I. Capodacqua, C. De Block-Docq, M. Grand'Henry, C. Hauchart, A. Bélenger et H. Masy.