Les problèmes au centre, au centre des problèmes

Benoît Jadin
avec la participation de tous les membres du GEM.

11 novembre 2017, le GEM fête ses 40 ans.

40 ans après

« Le point de départ de l'activité mathématique n'est pas la définition mais le problème. Si certains élèves, malgré tout, apprennent des mathématiques dans la stratégie pédagogique actuelle, c'est avant tout dans les moments où ils font des problèmes et doivent, pour les résoudre, se construire un savoir mathématique en s'aidant des bribes de cours qu'ils ont assimilées. » [1]

Ce propos qui a 30 ans, sous-entend que la pédagogie "actuelle", celle de l'époque, laisse peu de place aux problèmes, ce qui n'empêche pas certains élèves d'apprendre... Qu'en est-il aujourd'hui ? S'agit-il d'une très vieille histoire qui n'a plus cours parce que tous les enseignants ont compris depuis belle lurette qu'il faut déférer tout apprentissage mathématique à la résolution de problèmes, qu'il n'y a pas de moyen plus idoine de faire, voire qu'il s'agit d'une posture incontournable ? Ou, à rebours, la résolution de problèmes est-elle devenue complètement obsolète, abandonnée par tous les courants didactiques et à la dérive ?

Au GEM, depuis 40 ans, nous sommes des défenseurs ardents et convaincus du rôle irremplaçable des problèmes dans l'apprentissage mathématique ainsi que des pratiquants assidus. Et il reste vraisemblablement encore et toujours à convaincre de nombreux enseignants de mathématiques que les problèmes sont le sel des mathématiques y compris, et peut-être surtout, pour ceux qu'on considère comme des élèves faibles et qu'on renvoie parfois trop vite à des tâches mécanistes.

Pour quelques problèmes qui n'ont pas de statut particulier et que nous présentons dans le désordre, mais que nous avons plutôt choisis pour leur complémentarité, nous recherchons l'essence de ces activités en classe, tout particulièrement d'un point de vue méthodologique.

1 Voir dans sa tête

« La figure 1 pourrait représenter une vue aérienne d'un complexe d'habitations lorsque le soleil est en haut sur la gauche. » [2] Roméo se trouvant au sommet d'une tour, en P, peut-il voir Juliette en P' ?

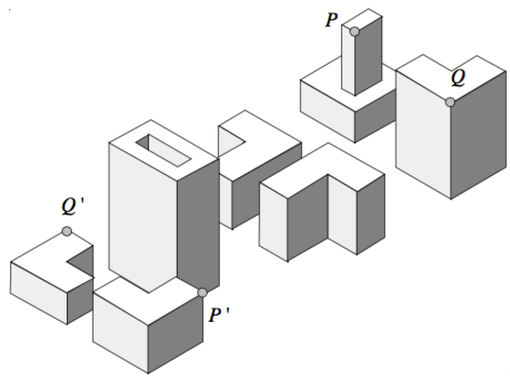

FIGURE 1 – Quartier Shakespearien

1. Bernard CHARLOT *Qu'est-ce que c'est faire des maths ?* Plot n°105 ancienne série, revue de l'APMEP, 1987.

2. Alain DESMARETS, Benoît JADIN, Nicolas ROUCHE, Pierre SARTIAUX. *Oh, moi les maths...* . Talus d'approche, 1997.

La même question peut se poser à propos des points Q et Q'.

1.1 Pas à pas

Les rayons visuels sont assimilables à des droites, on relie donc P à P'. Le segment passe peut-être entre deux bâtiments ? Ou audessus ? La question semble bien difficile, aucune démarche n'est proposée dans l'énoncé. Il faut en imaginer une, d'où l'intérêt du problème. On [3] peut essayer de construire les immeubles, de se les représenter… Supposons qu'à l'instar de certaines constructions modernes, ils soient composés de grandes vitres carrées. On cherche à en faire apparaître un nombre entier sur chacune des façades. [4] Ce que nous montre la figure 2. La solution ne

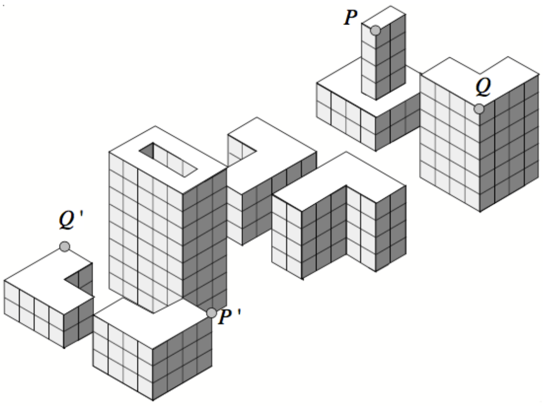

FIGURE 2 – Des bureaux d'affaires

paraît pas encore à portée de pensée.

Pour mieux percevoir la position relative des immeubles, on peut quadriller le sol avec des carrés de même taille que ceux utilisés pour les façades (figure 3). Mais comment vérifier que le rayon visuel passe entre les bâtiments qui se trouvent entre les deux immeubles sur

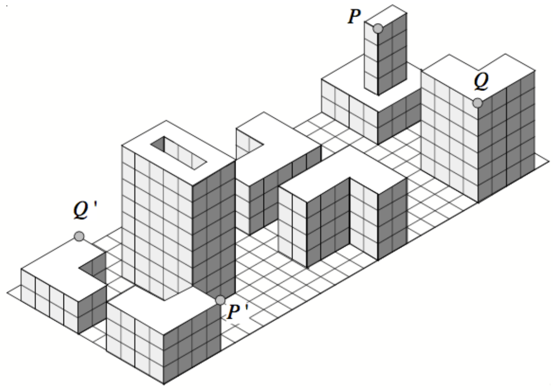

FIGURE 3 – Sur un sol pavé

lesquels se trouvent P et P'. Ou si ce n'est pas le cas, vérifier que le rayon visuel passe au dessus de ces bâtiments. On peut raisonner sur la pente de ce rayon et évoquer Thalès. Encore faut-il avoir ce bagage… On peut changer de point de vue, transformer la vue aérienne en vue "d'en haut" et construire un nouvel outil de représentation appelé vue en plan. La figure 4 nous montre le résultat. C'est

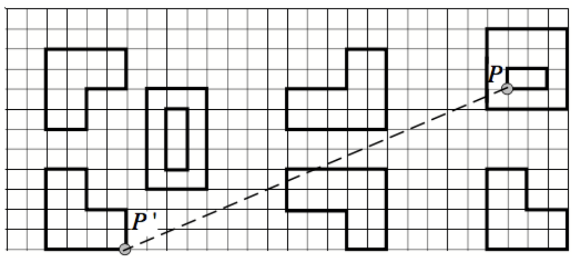

FIGURE 4 – Vue du haut

évident, le rayon visuel PP' ne passe pas entre les bâtiments. Tout n'est pas encore perdu, s'il passe au-dessus… Changeons encore de point de vue et regardons "d'en face", ce que nous montre la figure 5. De P, on peut donc voir P'.

1.2 À tous les niveaux

Le problème de Roméo et Juliette n'a pas une existence solitaire dans les classes. En primaire, dans le secondaire et dans le supérieur, on fait dessiner des modules composés de pe-

3. Sachant que ce problème a été testé dans de nombreux groupes, qu'il ne s'agit pas du récit d'une seule expérience mais d'une forme de reconstitution mêlant les apports des uns et des autres, nous utilisons le pronom personnel indéfini "on".

4. Rompus au travail sur papier pointé triangulaire, certains étudiants essayent de reconstituer un trame de ce type sur la perspective.

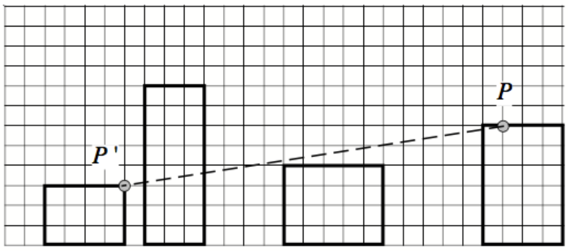

Figure 5 – Vue de face

tits cubes (figure 6). Ce sont d'abord des pe-

Figure 6 – Un assemblage de cubes

tits modules de quatre ou cinq cubes puis des modules de plus en plus sophistiqués qui sont considérés. Les élèves dessinent les modules librement, améliorent leurs épures en groupe, déterminent avec toute la classe des règles implicites de représentation. Ils opèrent :

- sur papier blanc ;
- sur papier pointé triangulaire (en perspective isométrique) ;
- sur papier quadrillé (en perspective cavalière, par exemple) ;
- ...

Les activités sont multiples et diverses [5] :

- dessin d'une ou plusieurs vues d'une même construction ;
- échange des feuilles et reconstruction par d'autres de ce qu'on fait les uns ;
- dictée de modules cachés ;
- description d'un module qu'on ne voit pas et qu'on ne peut manipuler qu'avec les mains dans le dos ;
- traduction de la construction ou du dessin perspectif en projection cotée (comme sur les cartes géographiques avec courbes de niveau) ;
- ...

1.3 Le sel du problème

Relevons quelques particularités du problème, intéressons-nous à ses vertus et aux méthodes de résolution en soulignant quelques attitudes, stratégies et postures particulières :

- Un changement de point de vue, vécu ici au premier sens du terme en quadrillant les façades et le sol puis en passant d'une vue "oblique" à une vue "de face" et une vue "de haut".
- Le concept de projection orthogonale et de vue en plan se développe tandis qu'il œuvre dans la résolution du problème montrant par là une valeur instrumentale tout différente de "cela servira plus tard" ou "ce sera utile en physique, en économie..."
- Le problème de Roméo et Juliette et tous ceux qui sont apparentés constituent un ensemble qui illustre l'utilité de diversifier les approches : manipulation, dictée, construction, dessin suivant des codes variés...
- Quelle que soit la perception qu'on a de la situation de départ et la croyance qu'on voit ou qu'on ne voit pas un point de l'autre, il faut justifier pour convaincre. La résolution du problème passe par le besoin d'argumenter en passant par la référence à un outil qu'il faut éventuellement construire s'il n'est pas encore acquis.
- Les questions sont ouvertes, voire très ouvertes. On parle de cadrage large

5. Sur le site du GEM (http://www.gem-math.be/), on pourra consulter tout particulièrement Martine De Terwangne, Stéphane Lambert, Sophie Loriaux. *Les représentations planes d'objets à l'école fondamentale.*

pour exprimer que les élèves ne sont pas enfermés ni dans l'exécution d'une suite de mini tâches, ni dans la répétition de consignes matérielles ("fais ceci, fais cela") à satisfaire. Le cadrage est également fort, grâce à un long travail de manipulations et de dessins, accompagné de l'explicitation des liens entre les activités menées ainsi que des liens entre le travail matériel et le savoir visé par les problèmes. Tout cela, pour éviter l'écueil de consignes implicites et d'attentes posturales qui n'auraient pas été travaillées en classe mais seraient des prédispositions acquises hors de l'école. [6]

— Plusieurs démarches sont possibles, aucune d'entre elles ne s'impose ni n'est dictée par l'énoncé : faire la construction à l'aide de cubes ; à partir de la perspective isométrique, abaisser PP' au sol, comparer des triangles, utiliser le théorème de Thalès ; passer à des vues en plan. Quelle liberté, quel plaisir pour les élèves et pour leur enseignant !

Il n'y a pas de construction de géométrie spatiale sans représentation plane et pas de construction des représentations planes sans géométrie spatiale. Les différents types de problèmes évoqués, liés aux perspectives et aux projections, sont riches et peuvent être adaptés à des élèves de la maternelle jusqu'à la fin du secondaire avec des niveaux d'expertise très variés.

2 Trouvez un nombre

Trouvez une fraction comprise entre $\frac{6}{11}$ et $\frac{7}{10}$. Combien y en a-t-il ?

6. Un cadrage large et fort en opposition au cadrage étroit et faible dénoncé par Stéphane Bonnéry. *Comprendre l'échec scolaire. Élèves en difficultés et dispositifs pédagogiques.* La Dispute, Paris, 2007.

2.1 Pas à pas

Dans une classe de vingt élèves [7], douze d'entre eux recherchent les fractions équivalentes et aboutissent à 16 nouveaux nombres compris entre 60 et 77. Ils affirment donc qu'il y a exactement 16 nombres entre $\frac{6}{11}$ et $\frac{7}{10}$:

$$\frac{61}{110}, \frac{62}{110}, \dots, \frac{76}{110}.$$

Et pas un de plus !

Quatre parmi ces 12 élèves, estiment ensuite qu'en multipliant par 10, on multiplie par 10 le nombre de fractions comprises entre les deux fractions initiales : $\frac{6}{11} = \frac{60}{110} = \frac{600}{1100}$ et les fractions $\frac{601}{1100}, \frac{602}{1100}, \dots, \frac{769}{1100}$ sont comprises entre $\frac{600}{1100}$ et $\frac{770}{1100}$.

Ce n'est pas vraiment 160 mais 169 nombres qu'on trouve de la sorte... Mais qu'à cela ne tienne, en multipliant encore par 10, puis par 10, et ainsi de suite, on peut trouver un nombre infini de nombres entre les deux fractions.

Quatre autres élèves partent des nombres décimaux en considérant que

$$\frac{6}{11} = 0,545454\dots \quad \text{et} \quad \frac{7}{10} = 0,7$$

Ils estiment alors qu'on peut obtenir une infinité de nombres décimaux entre les deux nombres donnés.

2.2 À tous les niveaux

Outre le fait de réduire les fractions au dénominateur plus petit commun multiple des deux dénominateurs de départ, et de prendre ensuite un multiple, il est possible :

— de réduire au même numérateur car pour comparer deux fractions, on peut utiliser l'une des règles "si même dénominateur, alors...", "si même numérateur, alors..." ;

— de prendre la fraction moyenne arithmétique des deux fractions de départ,

7. Dans une classe de Jordan Detaille, en deuxième année secondaire à Notre-Dame des Champs d'Uccle.

puis de considérer la moyenne arithmétique de celle-ci et d'une fraction de départ puis de réitérer le processus, d'où une infinité de nombres ;
— de transformer en écriture décimale avec une machine ou non : 0,545454... et 0,7. Entre les deux, en ne considérant que le premier chiffre après la virgule, on trouve 0,6. En prenant deux décimales, on trouve 0,55, 0,56, 0,57, 058, 0,69, soit 15 nombres ! Et ainsi de suite, en prenant trois décimales, puis quatre...

Des étudiants de niveau "bac" ont pronostiqué qu'il y a 17 nombres après avoir réduit les deux fractions au même dénominateur. Certains sont conscients que c'est plutôt 16 mais que ce n'est pas vraiment là qu'est le problème et s'abstiennent de tout commentaire. En évoquant ensuite des dénominateurs de 220 ou 330, ils pronostiquent 34 puis 51 nombres, des multiples de 17... On peut donc avoir une infinité de fractions entre les deux fractions ? Mais l'infini est-il un multiple de 17 ?

L'infini ? Il s'agit de faire formuler le plus clairement possible par et pour l'ensemble des élèves, ce que cela sous-entend. Par exemple, y a-t-il une différence entre "autant que l'on veut" et "une infinité" ? Au fil du cursus scolaire, une idée d'infini vient bousculer une autre, les concepts de nombres se développent, les rationnels se découvrent, des irrationnels apparaissent...

2.3 Le sel du problème

Soulignons quelques particularités du problème.

— Il met en lumière la diversité des approches (fractions, décimaux).
— Il permet de révéler les représentations des nombres, bonnes ou non, qu'ont les élèves. Par ailleurs, dans les deux approches rencontrées, une idée d'infini s'est exprimée.
— Du travail de recherche naît un "débat scientifique".[8] Certaines affirmations sont contestées... D'aucuns, par exemple, pensent d'abord qu'il y a 16 fractions intermédiaires (en fait, ils en comptent 15, 16 ou 17 suivant les groupes). Les réactions fusent et le professeur se retire, tandis que la discussion produit naturellement des arguments qui permettent de trancher.
— L'enseignant n'est pas le maître qui détient toute la vérité, qui tranche et qui valide. Les élèves exercent seul ou un groupe un contrôle de leurs pensées et de leurs productions. Ils font l'expérience d'un rapprochement des mathématiques qui deviennent autre chose qu'une matière purement formelle réduite à un mauvais cap à passer dans la scolarité. Une pensée autonome se développe. Ne s'agit-il pas de former des citoyens responsables capables d'argumenter, de critiquer, de se faire une opinion personnelle ?

« Une des compétences importantes, c'est le scepticisme. En Grande-Bretagne, les gens sont très sceptiques à l'égard des politiciens. Mais si vous leur donnez un problème de maths ou de statistiques, ils n'ont plus aucun scepticisme ! Ils ne comprennent pas, n'ont aucune idée de la façon de l'analyser, aucun outil pour le traiter. C'est pourtant indispensable dans une foule de décisions quotidiennes. »[9]

3 Les piles

On a testé 10 piles Duracell et 10 piles Wonder. Les figures 7 à 9 montrent les résultats.

8. Liouba Leroux et Thomas Lecorre. *Le débat scientifique en classe.* Plot n°19, revue de l'APMEP, 2007.

9. Interview du mathématicien anglais Conrad Wolfram (chef de la direction de Wolfram Research Europe, qui vend le logiciel Mathematica) par Isabelle Grégoire. *Libérez-nous du calcul !* Dans L'actualité du 5 mai 2015 à l'adresse http://lactualite.com/societe/2015/05/05/liberez-nous-du-calcul/. Consulté le 1er novembre 2017.

Les durées sont exprimées en heures. Dans chaque cas, au vu des résultats, quelle est la meilleure marque ?

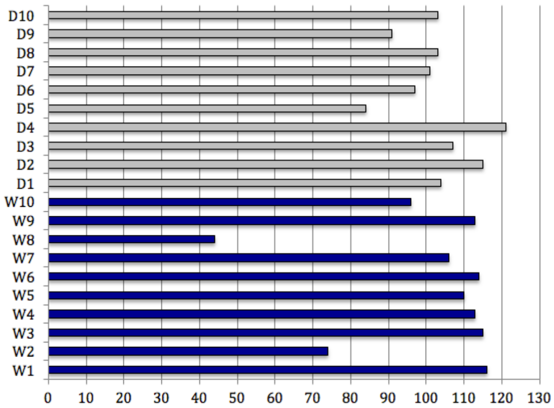

FIGURE 7 – Durée de vie, en heures, de 20 piles

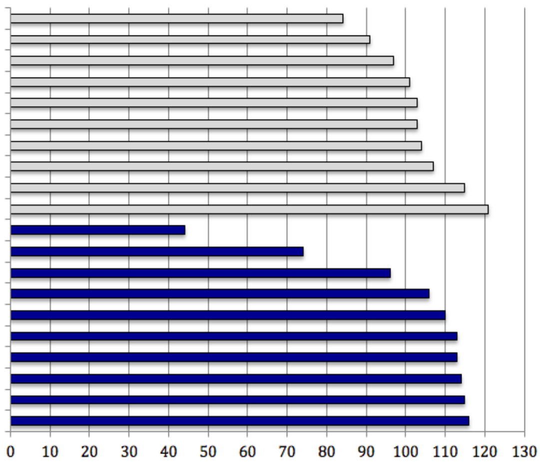

FIGURE 8 – Un autre graphique de durée

3.1 Pas à pas

En quatrième primaire [10], avant d'aborder ce problème, on a familiarisé les élèves à ce type de graphique.

À Alleur, à partir du premier graphique (figure 7), quatre groupes sur cinq se prononcent pour

10. En 2009, dans une classe de Catherine Simon à Vottem et dans une classe de Stéphanie Dethier à Alleur.

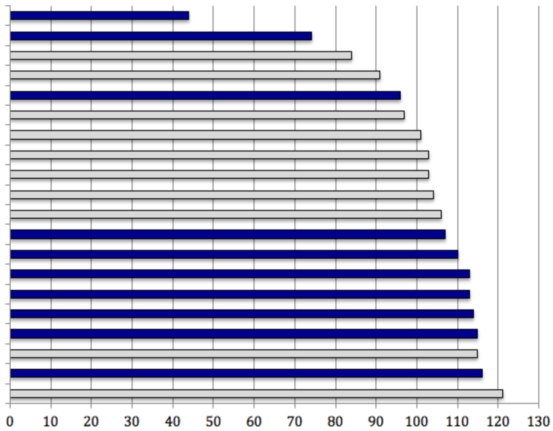

FIGURE 9 – Encore un graphique de durée

Wonder même si dans un de ces groupes il n'y a eu ni accord, ni arguments et que certains pensent que c'est Duracell, mais l'avis est influencé par la position prise par un groupe qui s'est prononcé avant eux.

— *« On a coupé le graphique à 100 et on a regardé celui qui dépassait le plus souvent 100 h et c'est Wonder.*

— *Quand on regarde les petites barres, il y en a plus qui sont plus grandes dans les Wonder.*

— *C'est Duracell la meilleure ! A un moment, les Wonder sont plus mauvaises comme W8, W2.*

— *J'ai additionné, c'est Duracell. Mais je ne sais plus.* [L'élève ne peut pas donner les totaux ni vraiment expliquer ce qu'il a fait.]...

— *Il y a plus de piles Wonder qui durent plus longtemps que Duracell, c'est 7 contre 3. »* [Ces élèves ont fait des couples en associant chaque fois une pile Wonder avec une pile Duracell.]

Le deuxième graphique (figure 8) est donné. Involontairement, l'institutrice a induit qu'il s'agissait de la même situation. Les élèves sont amenés à suivre le même processus que pour le premier graphique. Les avis ne changent dans aucun des groupes. Mais le débat gagne en intensité. Les arguments ne changent pas non plus. Le seul groupe partisan de Duracell ajoute qu'il y a deux piles très faibles chez Wonder.

Le troisième graphique est donné (figure 9). Statut quo des avis et des arguments. Si ce n'est un élève du "groupe Duracell" qui ajoute encore que si on mettait toutes les barres sur une ligne droite, c'est Duracell qui gagnerait. Puis il nuance, s'il y a une grosse différence, on le verra tout de suite, mais s'il y a une petite différence ?

L'après-midi se termine. Les élèves veulent savoir qui a raison, l'institutrice invite le membre du GEM qui a rédigé le problème et qui observe dans le fond de la classe, à donner mon avis. Celui-ci précise que cela dépend du critère. Par exemple, si on regarde le nombre de piles qui arrivent à 110 h, il y en a 6 chez Wonder et 2 chez Duracell. Par contre, si on fait la somme comme un élève l'a prôné,on arrive à un total de 1001 pour Wonder et 1026 pour Duracell. *« Oui mais finalement, c'est qui qui gagne ? »*, demandent avec insistance des élèves en sortant de la classe. C'eut été l'occasion de relancer le débat… Il n'est jamais trop tôt pour débarrasser petit à petit les élèves de l'idée que c'est le prof qui a raison et que suivant les critères utilisés, on peut déboucher sur des choix différents.

À Vottem, les élèves ont reçu les trois graphiques en même temps. Ils ne savent pas qu'il s'agit de la même situation.

- À partir du graphique 2 (figure 8), un élève compare les maxima et juge que c'est supérieur chez Duracell.
- À partir du graphique 3 (figure 9), certains jugent qu'il y a plus de Wonder en bas du graphique (donc de durée plus longue)
- Pour certains la question semble être : quelle est la pile qui dure le plus longtemps ?
- Un élève demande si on peut faire des calculs.
- Un élève semble essayer par compensation entre piles d'une même marque. Il aboutit à des conclusions différentes suivant le graphique.
- *« C'est Duracell qui gagne parce que là (Wonder) il y a des petits et là (Duracell) c'est des grands plus grands (que ceux de wonder).*
- *À plus de 110 heures, il y a plus de Wonder.*
- *Oui mais, les barres pour Duracell sont plus grandes.*
- *Si on votait ? »* Trois quarts des élèves votent pour Duracell.

3.2 À tous les niveaux

Le graphique en barres [11] est un "mini outil" [12] exploitable directement sans grand préalable si ce n'est faire lire, compléter et réaliser l'un ou l'autre graphique avec quelques données au départ. Comme vous l'avez remarqué si vous avez fait l'exercice, il favorise plus ou moins bien la comparaison de petits échantillons et permet d'aborder des notions de valeurs centrales (moyenne et médiane) et celle de dispersion de façon assez intuitive.

Le graphique en barres mue assez facilement en un autre mini outil qu'est le graphique à points. Il suffit de ne considérer que les points extrémités des barres (figure 10) et de les "laisser retomber et s'empiler" sur l'axe de la variable (figure 11). La figure 12, nous invite par exemple, à la comparaison de deux distributions de poids. On perçoit comment le graphique à points préfigure les courbes en cloche ou courbes de Gauss utilisées par tant de disciplines.

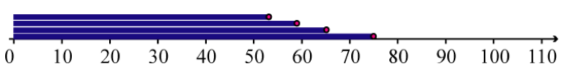

FIGURE 10 – Du graphique en barres…

11. Il s'agit d'une appellation que nous utilisons pour faire la distinction avec les graphiques en bâtonnets.

12. En référence aux minitools chers au Freudenthal Institute auquel nous avons emprunté l'idée, on peut les retrouver sous forme d'applet java à l'adresse http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

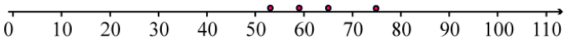

FIGURE 11 – Au graphique à points

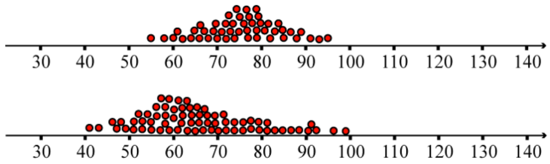

FIGURE 12 – Deux distributions de poids en kg

3.3 Le sel du problème

Le problème des piles, avec une question ouverte au départ (ce qui n'empêche pas qu'on puisse la refermer), favorise une variété des approches. Tandis que d'aucuns en restent à des considérations graphiques, d'autres se mettent au calcul et construisent une objet mental annonciateur de la moyenne. On constate encore que la disposition des barres change le regard et induit, éventuellement, des conclusions différentes.

Une fonction des problèmes, mise en lumière ici, est la nécessité de poser des questions. On ne peut pas comparer sans avoir précisé un point de vue, un critère. On peut même affirmer que le questionnement prime, dans ce cas, sur la résolution. *« Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. »* [8]

Par ailleurs, la solution passe par la construction d'outils conceptuels. Dans le cas présent, il peut s'agir de l'étendue, de la moyenne, de la part des valeurs plus petites ou plus grandes qu'une valeur donnée...

Beaucoup d'élèves pensent, qu'en mathématique, il n'y a qu'une solution à un problème et qu'un propos est soit vrai ou pas. Dans le cas de cette comparaison de piles, suivant le concept utilisé, on peut arriver à des conclusions opposées. Cela correspond mieux à ce qui se passe dans le vie réelle : deux personnes peuvent avoir des avis différents et avoir toutes deux raisons, c'est l'argumentation qui prime. Un plus pour le débat, le poivre du problème...

4 Les doubles

Comment placer le miroir derrière des jetons circulaire pour en voir 5 en tout ?

FIGURE 13 – La multiplication des euros

4.1 Pas à pas

Ce problème est posé en première primaire. [13] Le contexte est chaque fois la découverte des doubles par le miroir (des miroirs carrés de 13 sur 13 cm). L'expérience a été menée avec des petits cubes et non des jetons. Il s'agit de s'amuser d'abord avec ce que provoque la vision dans le miroir quand on a des cubes à disposition, pêle-mêle, rangés, en tours, à plat... Et voir comment en plaçant le miroir derrière des cubes agencés comme sur le domino, le double se voit du premier coup d'œil...

— *« Si tu mets des cubes sur le miroir, tu les vois pareils en dessous.*
— *Est-ce qu'il y en a autant en dessous que dessus ?*
— *Oui, le miroir, ça copie.*

13. Par Martine de Terwangne, dans une classe du Collège Notre-Dame de Basse-Wavre.

— *Comment ça se fait qu'on a deux fois la même chose avec le miroir ?*
— *Parce que c'est le reflet, c'est la copie, c'est pile la même chose. Ça fait le double en tout.*
— *Et si tu as 5 cubes devant le miroir, tu auras toujours 10, c'est comme ça puisque ça a copié tout juste ! »*

Puis, plusieurs essais sont menés avec 3, 6, 8, 9... On liste les simples et leur double, on en fera la trace plus tard. Quasi tous les élèves se sont rendu compte de l'efficacité d'une organisation des cubes en schèmes comme les faces d'un dé, plutôt qu'en ligne devant le miroir. En ligne, on perd du temps à recompter tandis "qu'en dé", la quantité saute aux yeux.

— *« Mais comment faire maintenant pour avoir 5 cubes grâce au miroir ? Donc voir 5 cubes en tout.*
— *Avec 2, ça va pas, avec 3, non... Ça va pas, ça cloche ! J'comprends rien !*
— *C'est bizarre parce que normalement, le miroir, ça marche qu'avec des paires, ça donne que des paires, les doubles ! Et 5, c'est impair ?*
— *Faut être vraiment malin ! ? Ou alors, il faut un demi quelque part !*
— *Ça y est, tu dois couper le dernier en 2 avant que ça fasse trop : avec 2 ça fait 4, avec 3, ça fait 6 et donc c'est le troisième qui est de trop ! Celui-là, tu le coupes en 2 !*
— *Et comme c'est impossible à couper, tu le décales à moitié pour que le miroir "le voie" seulement à moitié.*
— *Moi je mets le miroir dessus sur la moitié, ça va aussi.*
— *Ok, vous avez trouvé comment avoir 5 avec le miroir. Et donc, que peut-on dire : le miroir donne le double de combien s'il fait voir 5 ?*
— *De 2 et un demi.*
— *5 c'est le double de 2 et un demi. »*
— *« Est-ce qu'on pourrait avoir 11 comme double grâce au miroir, grâce au reflet ?*
— *Oui, il faut chercher entre le juste trop peu et le juste trop.*

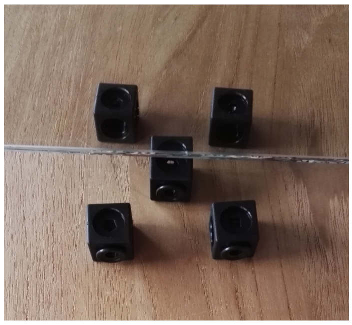

FIGURE 14 – Le compte est bon

— *Moi, je cherche simplement le nombre pair avant et après : 10 et 12. Et je cherche combien de cubes mettre devant le miroir pour trouver ça. Donc, c'est entre 5 et 6 !*
— *Et moi je mets des cubes un à un jusqu'à ce que j'arrive tout près de 11 avec le miroir.*
— *Finalement, 11 est le double de combien ?*
— *5 et demi. »*

Grâce au miroir, je vois 26 cubes, 26 est le double d'une quantité de cubes ? Combien y en a-t-il devant le miroir ? Certains enfants place 26 cubes devant le miroir avant de se rendre compte de leur erreur. D'autres ont une organisation de 26 dans leur tête et placent de suite 13 cubes de façon à retrouver ce qu'ils avaient imaginé. Et d'autres placent 5 cubes à la fois : *« avec 5, j'ai déjà 10 ; encore 5 et j'ai 20 ; encore 5 et là j'ai trop. »* Et il retire 1 cube à la fois jusqu'au nombre voulu. *À la prochaine leçon, on fera comme si on avait les miroirs. On verra la trace comme dans le sable. Et on s'entraînera pour que cela devienne automatique pour n'importe quel nombre.*

4.2 Le sel du problème

Quand les élèves comptabilisent des jetons ou des cubes et leurs reflets dans le miroir, ils assistent à un effet du miroir qui consiste à doubler le nombre d'objets initialement présents. Alors que la solution passe par la démarche inverse qui consiste à couper un ensemble de cubes en deux sous-ensembles identiques. Il y a donc un va-et-vient entre les deux opérations.

En y regardant de près, l'expérimentation est vraiment particulière : regarder des nombres dans un miroir, imaginer celui-ci comme une machine à dédoubler puis à couper ! L'expérience a un caractère mental sans que cela pose problème à quelqu'élève que ce soit. Les élèves et l'enseignant s'embarrassent peu de savoir, quand on regarde un demi cube dans le miroir si le cube entier est parfaitement reformé. Ils s'embarrassent peu du miroir tandis qu'ils se sont construit une bonne représentation mentale de la situation. Ce n'est pas l'expérience mais la réflexion qui les fait aboutir au demi.

La manipulation d'un ou de deux miroirs (dans des positions différentes) est par ailleurs très porteuse et large… Le petit fait particulier que la moitié de 5, c'est 2 et 1/2, n'est qu'une tout petite partie de ce que peuvent révéler ces expériences.

5 La droite mère

« Prenez un carré de papier et faites un pli rectiligne, quelconque. Marquez bien ce pli puis dépliez votre carré. Ce premier pli est appelé la droite mère. Marquez-le en couleur pour le distinguer des plis suivants (figure 15). Pour construire les plis enfants de la droite

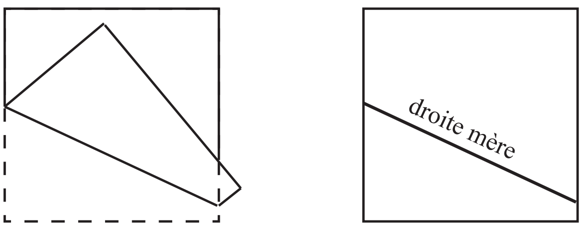

FIGURE 15 – La droite mère

mère, considérez d'abord un côté du carré non coupé par la droite mère et faites un pli qui amène ce côté le long de la droite mère (figure 16). Marquez-le bien puis dépliez. Vous avez construit un pli enfant. Prenez à présent un côté du carré coupé par la droite mère et pliez et dépliez successivement chacune des parties de ce côté le long de la droite mère pour obtenir deux nouveaux plis enfants. Faites ensuite de même pour tous les autres côtés ou parties de côtés du carré, en dépliant à chaque fois. »[14] Observez bien votre pliage. Attardez-

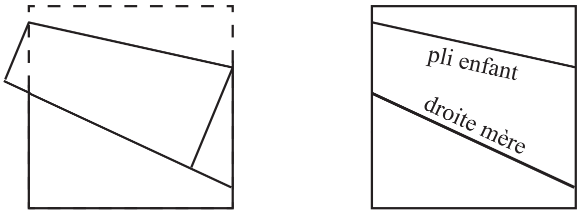

FIGURE 16 – Un pli enfant

vous sur les plis et leurs points d'intersection, sur les positions des uns et des autres, sur des angles et des figures particulières. Quelles conjectures pouvez-vous faire ? Considérez des droites mères dans des positions différentes et testez la viabilité de vos observations.

5.1 Pas à pas

En observant les plis sur la feuille, on peut faire un certain nombre de conjectures :

- Il y a 6 plis sauf quand la droite mère est diagonale du carré, il n'y en a plus que 4.
- Les plis se coupent en des points qui sont sur une médiane ou une diagonale du carré initial.
- Il y a des paires de plis parallèles, 2 ou 3 suivant que la droite mère coupe des côtés adjacents ou opposés du carré.
- Là où la droite mère coupe un côté, deux plis sont perpendiculaires et un rectangle se forme par le prolongement des plis quand la droite mère coupe deux côtés opposés.
- Certains plis (ou leurs prolongements)

14. Laure NINOVE. *Rencontre avec la droite mère, Un élégant problème d'origami de Kazuo Haga.* Losanges n°12, revue de la SBPM, 2011.

forment des triangles rectangles isocèles.

— ...

Il reste à vérifier le bien fondé de chacune des conjectures et, le cas échéant, à en donner la preuve. Intéressons-nous à la première. Quand la droite mère coupe un côté du carré en deux segments, il y a deux rabattements pour chacun des segments déterminés et deux plis enfants. Quand la droite mère ne coupe pas un côté, il n'y a qu'un rabattement de celui-ci sur la droite mère et un seul pli enfant. De façon générale, comme la droite mère coupe deux côtés du carré, on a $2 \times 2 + 2$ ou 6 plis. Quand la droite mère est diagonale du carré, on n'a plus que quatre plis et cela fait penser qu'on peut aussi trouver un cas avec 5 plis, oublié dans la conjecture, si la droite mère est issue d'un sommet du carré et coupe un côté non adjacent à ce sommet.

Considérons ensuite la deuxième conjecture, à savoir que les points d'intersection de certains plis sont sur une diagonale ou une médiane du carré. On considère une droite mère m qui coupe, en E et F, deux côtés adjacents en C, du carré $ABCD$ (figure 17). On considère ensuite deux plis p et q qui se coupent en X. Quand on plie pour ramener $[EC]$ sur la droite

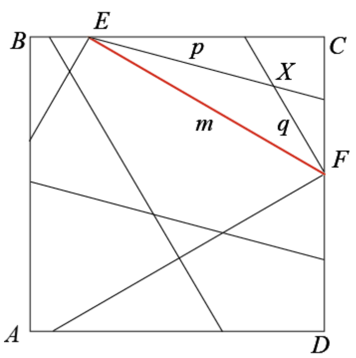

Figure 17 – Point d'intersection de deux plis

mère m, le pli p est une bissectrice qui coupe l'angle en deux. C'est le cas aussi pour le pli q. Mais dans le triangle ECF, les bissectrices se coupent en un point et la bissectrice issue de C passe donc par X. Comme il s'agit d'un angle droit, c'est aussi la diagonale du carré.

Pour d'autres points, c'est moins évident. Il faut penser à côté de la figure, déposer le carré sur une feuille plus grande que lui et prolonger la droite mère, les plis enfants ainsi que les côtés du carré (figure 18). Pour le point Y à

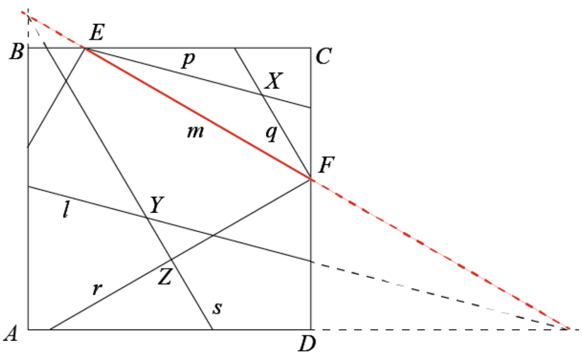

Figure 18 – Voir à côté

l'intersection des plis l et s, le prolongement des droites fait mieux apparaître que les plis sont aussi des bissectrices considérées dans ce cas comme un ensemble des points à égales distances de deux droites données. Dès lors comme l est un ensemble de points à égales distances de m et de AD et que s est un ensemble de points à égales distances de m et de AB, le point d'intersection Y est à égales distances des droites AB et AD, il est donc sur la bissectrice des demi-droites $[AB$ et $[AD$ issue de A qui est aussi une diagonale du carré initial.

Pour le point Z intersection des plis r et s, on peut raisonner de la même manière et en déduire que Z est à égales distances des droites AB et CD. Comme ces dernières sont parallèles, Z est sur une parallèle à ces deux droites et à mi distance, c'est-à-dire sur une médiane du carré.

En comptant les plis, certains ont compté aussi les points d'intersections. Ils les prennent tous en compte y compris ceux qui sont extérieurs au carré. Mais le comptage qu'ils font sur la figure ne correspond pas au dénombrement systématique effectué en comptabilisant toutes les possibilités d'intersection que l'on a en prenant les plis deux à deux et en retirant les cas où on a affaire à des plis parallèles. Pour un pli mère qui coupe deux côtés adjacents, par exemple, il y a 6 plis et $(6 \times 5)/2$ ou 15 possibilités de rencontre. Mais il faut supprimer les deux cas de plis parallèles, il reste 13 points d'intersection.

5.2 À tous les niveaux

Le problème de la droite mère accouche de nombreuses conjectures, variables d'une classe à l'autre et d'un groupe à l'autre dans une même classe. Il s'agit d'un problème relativement ouvert qui peut être refermé si la classe est en difficulté et cela, sans tomber dans des tâches mécanistes. [15] Pour les preuves, on peut confier un énoncé à chaque groupe. Cela peut s'avérer laborieux au départ, certains n'ayant toujours rien trouvé après un quart d'heure. Pour des raisons qui peuvent être diverses comme, par exemple, une mobilisation lente de savoirs existants : qu'est-ce qu'un pli par rapport aux deux droites qu'on superpose ? Le professeur animateur débloque alors la situation par un geste, une question ou un mot clé comme celui de bissectrice. Le problème fait intervenir de nombreux contenus géométriques relatifs d'une part aux angles, à la somme des amplitudes dans un triangle, aux alternes internes ; et d'autre part, aux bissectrices et à leurs propriétés. On peut cibler certains contenus. Ils peuvent être l'objet d'un premier contact pour certains élèves ou approfondissement pour d'autres si d'autres activités les ont mis en place.

5.3 Le sel du problème

Que les élèves travaillent à deux ou quatre, le pliage, phase d'exploration, est un moment d'excitation, de créativité, voire d'émerveillement ; la seule contrainte étant relative au temps. Collective, la phase de formulation des conjectures donne à chaque groupe l'occasion d'énoncer un ou plusieurs constats. La phase d'argumentation et de démonstration livre de jolies surprises dont quelques-unes sont relevées ci-après.

- Chaque groupe a réalisé de nombreux carrés avec des droites mères différentes. Un va-et-vient permanent se fait entre ces épreuves et la preuve.
- Le travail de démonstration débouche parfois sur une correction de l'énoncé, comme dans le cas où des élèves avaient conjecturé 4 ou 6 plis alors qu'il pouvait aussi y en avoir 5. Il débouche aussi parfois sur un nouvel énoncé comme cela a été le cas pour des élèves qui se sont intéressés au nombre de points d'intersection entre les plis.
- Il y a des preuves générales qui conviennent à presque tous les cas, comme l'existence d'un rectangle. Dans un cas limite, quand la droite mère est médiane du carré, le rectangle devient carré ; mais dans un autre cas limite, quand la droite mère est diagonale du carré, il n'y a plus de rectangle mais un losange.
- Que se passe-t-il si on déplace la droite mère parallèlement à elle-même ? Comment se déplacent les plis enfants ? Et dans les cas limites, comme lorsqu'une droite mère médiane vient sur un côté ?
- Pour une conjecture donnée, il n'y a pas qu'une démonstration possible.
- Quand la bissectrice devient un pli sur une feuille, elle prend une forme concrète et variable. Ce sont des dizaines de bissectrices qui sont construites par les élèves. *L'abstrait est le multi concret.* [16] Par ailleurs, la manipulation alimente l'observation et l'observation relance la manipulation : une propriété vue sur une situation

15. Pour plus de détails, le lecteur se reportera à l'article de Laure Ninove [5].

16. Dans notre souvenir, cette expression est d'André Lichnérowicz, mais nous n'avons pas pu en retrouver la source.

donnée, est-elle partagée par d'autres ou par toutes ? L'argumentation prend alors le relais de l'observation pour apporter des preuves aux conjectures émises.

6 Problèmes de sel

Au travers des quelques situations regardées, nous avons vu que les problèmes induisent ou favorisent ou nécessitent des postures et des réactions méthodologiques diverses :

- expérimenter, explorer diverses situations liées à une même question ;
- changer de point de vue, penser à côté ;
- varier les approches ;
- imaginer, inventer ;
- effectuer des va-et-vient entre diverses opérations,
- aller du particulier au général ou du général au particulier ;
- argumenter, justifier, démontrer ;
- douter, être critique ;
- formuler un questionnement ;
- forcer la construction d'objets mentaux. [17]

Du point de vue didactique, on a pu montrer que les problèmes

- doivent partir, mais pas camper, sur le terrain de l'élève ;
- révèlent les représentations que les élèves se font des concepts étudiés ;
- sont plus efficaces s'ils s'enchaînent et même parfois, s'ils mènent loin ;
- peuvent donner une valeur instrumentale aux outils conceptuels développés ;
- s'expriment en questions plus ou moins ouvertes qu'on peut refermer si nécessaire ;
- peuvent créer une motivation et donner du sens ;
- s'appuient quelquefois autant sur des expériences mentales que concrètes ;
- suscitent le débat ;
- induisent une pensée autonome.

S'il n'y a pas de mathématiques sans problèmes, il n'y a pas non plus de problèmes sans recherche. L'attitude à adopter par le professeur dans la gestion de ces activités n'est pas forcément simple. Régulateur institutionnel, empathique au niveau relationnel, il se retire du point du vue intellectuel, évite de valider des réponses ou de donner des pistes et des relances trop rapides. Il fait confiance aux élèves et surtout, leur donne du temps. On ne résout pas des problèmes en cinq ou dix minutes, on n'a parfois presque rien trouvé après une demi heure...

La difficulté de bien gérer la classe avec l'alternance de réflexions solitaires, de travaux en groupes et de synthèses collégiales est probablement un frein pour un certain nombre d'enseignants. D'autant que de nombreux pièges guettent l'animateur comme celui de vendre la mèche trop rapidement ou celui d'opérer des cadrages trop faibles et trop étroits qui, pour Stéphane Bonnéry, sont interdépendants, et procèdent d'un double souci. *« Celui, d'une part, de faire construire le savoir par des élèves actifs et autonomes, en évitant de réguler le lien entre la tâche et le savoir d'une façon trop institutionnalisée, collective, formalisée. Celui, d'autre part, de s'adapter par des consignes reformulées, des validations partielles morcelées et des régulations individuelles aux difficultés des élèves, ce qui permet à ces derniers de se contenter d'attitudes de conformité. »* [3]

Par ailleurs, il n'y a pas d'élèves chercheurs sans profs chercheurs. La recherche de ces derniers précède celle des élèves et elle est plus motivante et plus riche quand elle se fait à plusieurs. C'est la raison d'exister du GEM depuis 40 ans, c'est notre source commune de plaisir et d'intérêt intellectuel : la recherche partagée, la résolution de problèmes de ma-

17. *« Les objets mentaux sont des notions de type mathématique et qui soit appartiennent à la pensée commune, soit sont intermédiaires entre celle-ci et les mathématiques constituées. »* Par opposition aux concepts qui *« sont des objets techniquement définis dans une théorie axiomatisée. »* [6]

thématiques, la création de nouveaux problèmes ou l'adaptation de problèmes découverts ailleurs, leur enrichissement, leur prolongement en séquences d'apprentissage plus vastes, leur analyse épistémologique. [18]

« S'il n'y avait plus de problèmes, avec quoi salerait-on ? » [19] En parlant d'enseignement sans problèmes, Gaston Bachelard va plus loin et écrit : *« Mieux vaudrait une ignorance complète qu'une connaissance privée de son principe fondamental. »* [8]

Références

[1] Bernard Charlot *Qu'est-ce que c'est faire des maths ?* Plot n°105, revue de l'APMEP, 1987

[2] Alain Desmarets, Benoît Jadin, Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux. *Oh, moi les maths...* Talus d'approche, 1997.

[3] Stéphane Bonnéry. *Comprendre l'échec scolaire. Elèves en difficultés et dispositifs pédagogiques.* La Dispute, Paris, 2007.

[4] Kazuo Haga. *Origamics : Mathematical explorations through paper folding.* Edité et traduit par J.C. Fonacier et M. Isoda, World Scientific, Singapore, 2008.

[5] Laure Ninove. *Rencontre avec la droite mère, Un élégant problème d'origami de Kazuo Haga.* Revue Losanges n°12, revue de la SBPM, 2011.

[6] Bernard Honclaire, Nicolas Rouche, Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye, Marisa Krysinska. *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans.* CREM, 1995.

[7] GEM. *Lettre du GEM au GFEN.* Dialogue n°54 bis, revue du Groupe Français d'Éducation Nouvelle, 1985.

[8] Gaston Bachelard. *La formation de l'esprit scientifique.* J. Vrin, Paris, 1985.

Table des matières

Groupe d'Enseignement Mathématique
Chemin du Cyclotron 2
B-1348 Louvain-la-Neuve
http://www.gem-math.be/
✉ contact@gem-math.be
@gem.lln

18. Pour plus de détails sur cette notion, on pourra lire la Lettre du GEM au GFEN dans la revue Dialogue n°54 bis, en mai 1985, du Groupe Français d'Éducation Nouvelle.

19. Benoît Jadin. *S'il n'y avait plus de problèmes, avec quoi salerait-on ?* Dans la revue Échec à l'échec n°59 de décembre 1989 de CGé (Changements pour l'égalité).