Activités avec GeoGebra

à propos des transformations de graphes de fonctions

Ginette Cuisinier, Christine Docq, Marc Lefebvre,

Dany Legrand, André Malo, Rosane Tossut

Introduction

Cette séquence a pour objectifs :

- d'apprendre à manipuler des graphes de fonctions,
- d'interpréter et comprendre les écritures algébriques qui s'y rapportent.

Nous utiliserons le logiciel GeoGebra pour élaborer la théorie, non pour l'appliquer.

En effet, le logiciel permet d'obtenir rapidement des graphes précis et propres et l'utilisation de curseurs permet de faire varier ceux-ci en fonction de paramètres choisis. Nous pourrons ainsi explorer les situations et élaborer une première généralisation.

La démarche proposée nécessite à certains moments un dialogue entre l'enseignant et les élèves.

Nous aborderons dans un premier temps les translations verticales et horizontales sur des fonctions usuelles, séparément puis ensemble.

Les dilatations sont envisagées au moyen de la fonction « *floor* » ou « *plancher* » (plus grand entier inférieur ou égal à la variable) qui permet de différencier dilatations verticales et horizontales. Nous l'avons préférée aux fonctions trigonométriques qui permettent également cette distinction mais ajoutent des difficultés d'unités (radians) pour beaucoup d'élèves. Comme elles, et contrairement aux puissances, *floor* ne laisse pas d'alternative à l'écriture au moyen des transformations.

Comme pour les translations, nous travaillerons d'abord les dilatations verticales et horizontales séparément puis ensemble pour généraliser.

Nous clôturons par deux exercices « papier-crayon ».

Quelques commentaires concernant l'utilisation du logiciel sont présentés sur fond grisé.

Nous n'avons travaillé ici que l'aspect technique des transformations de graphes. Il est nécessaire de contextualiser cette matière (par exemple, en étudiant la hauteur en fonction du temps d'un objet lâché à des moments différents et à des hauteurs différentes). Cet aspect n'a pas été développé dans ce texte. Celui-ci ne reprend pas non plus la théorie et les justifications liées à la matière étudiée.

I. Utiliser un curseur

1. Dessinez un cercle de centre $(4,0)$ et dont le rayon peut varier de $r = 0$ à $r = 10$.

Cette question amène les élèves à créer un curseur pour r variant de 0 à 10 et à créer une courbe dépendant de ce curseur. Ils découvrent les variations de l'équation et du graphe en fonction de ce curseur.

II. Translations

2. Dessinez le graphe de $y = x^2$ et colorez-la en bleu.
   Construisez un curseur permettant de faire varier un paramètre k de 0 à 10.
   Pour chaque cas ci-dessous, donnez, en utilisant ce paramètre k, l'expression algébrique de la fonction
   a) dont le graphe est un translaté vertical du graphe de départ,
   b) dont le graphe est un translaté horizontal du graphe de départ.

3. Ouvrez une nouvelle fenêtre et traitez la même question pour le graphe de $y = \sqrt{x}$.

4. Ouvrez une nouvelle fenêtre et traitez la même question pour le graphe de $y = x^3$.

A la question 2, les élèves doivent créer un curseur k et fournir au logiciel les équations paramétrées pour obtenir un translaté vertical ou horizontal de la parabole $y = x^2$.

Nous avons choisi de ne donner au paramètre k que des valeurs positives afin de mettre en évidence l'opération d'addition ou de soustraction qui doit être appliquée :

- $y = x^2 + k$ pour une translation verticale vers le haut ;
- $y = x^2 - k$ pour une translation verticale vers le bas ;
- $y = (x + k)^2$ pour une translation horizontale vers la gauche ;
- $y = (x - k)^2$ pour une translation horizontale vers la droite.

Le travail est répété pour deux autres fonctions élémentaires avant d'être généralisé à la question 5.

A la question 2, si on écrit la fonction du 2e degré sous la forme $f(x) = x^2$ et qu'on translate le graphique avec la souris pour amener son sommet en (a,b), l'expression algébrique de la translatée est $f(x) = (x-a)^2 + b$.
Par contre, si on écrit la fonction du 2e degré sous la forme $y = x^2$, la translatée prend la forme « $y = \textit{un polynôme}$ ».
Les questions sont adaptées pour éviter que les réponses attendues n'apparaissent directement à l'écran.

Si on écrit une fonction sous la forme « $y = \cdots$» lors de la saisie, GeoGebra conserve cette écriture lorsque le second membre est un 1e ou 2e degré. Dans les autres cas, elle transforme automatiquement « $y = \cdots$» en « $f(x) = \cdots$».

5. Généralisation.
   Soit une fonction $f(x)$ et un nombre k positif.
   Donnez l'expression algébrique des quatre fonctions dont les graphes sont obtenus par translations verticales et horizontales de k unités de celui de $f(x)$.

Voici la généralisation attendue :

- $y = f(x) + k$ pour une translation verticale vers le haut ;
- $y = f(x) - k$ pour une translation verticale vers le bas ;
- $y = f(x+k)$ pour une translation horizontale vers la gauche ;
- $y = f(x-k)$ pour une translation horizontale vers la droite.

6. Proposez et vérifiez ensuite par GeoGebra une expression pour les fonctions dont le graphe est obtenu par translation du graphe de $f(x) = x^2$ et dont les sommets sont respectivement $(3,5)$, $(-2,4)$, $(1,-3)$ et $(-4,-5)$.
   Généralisez l'expression pour un sommet en (a,b).

La question 6 combine les deux types de translations, horizontales et verticales. Les élèves peuvent répondre au cas par cas ou utiliser deux curseurs nommés *a* et *b* dont les valeurs varient de –5 à 5.

L'expression générale de la translatée est $f(x) = (x-a)^2 + b$.

III. Dilatations – compressions

7. Introduisez la fonction $floor(x)$ dans la barre de saisie.
   Le graphe a la forme d'un escalier vu de profil, c'est pourquoi on l'appelle *fonction en escalier*. Expliquez l'action de cette fonction en escalier sur la variable x.

8. Trouvez l'expression de la fonction
   a) dont le graphe a des marches 2 fois plus hautes,
   b) dont le graphe a des marches 3 fois plus profondes.

9. Utilisez deux curseurs pour construire un escalier dont la hauteur et la profondeur des marches peuvent varier indépendamment

La fonction *floor* fournit le plus grand entier inférieur ou égal à la variable. Elle est différente de la fonction « partie entière » pour les valeurs négatives de la variable.

La question 8 conduit aux fonctions $2\,floor(x)$ et $floor\left(\frac{x}{3}\right)$.

Les élèves peuvent procéder par essai-erreur dans un premier temps, ce qui provoque la surprise. Les explications viennent ensuite.

A la question 9, si a et b désignent les deux curseurs, la fonction $a.floor\left(\frac{x}{b}\right)$ permet d'obtenir le résultat.

IV. Symétries

10. Reprenons la fonction $floor(x)$. Donnez l'expression d'une fonction dont le graphe est un escalier descendant de gauche à droite. Y a-t-il plusieurs solutions ?

Les fonctions $-floor(x)$ et $floor(-x)$ permettent toutes deux d'obtenir le résultat demandé. La première fournit le symétrique du graphe initial par rapport à l'axe des abscisses, la seconde le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

V. Exercices

11. Sur les figures suivantes, on a représenté le graphe d'une fonction $f(x)$ en trait plein et le graphe d'une fonction $g(x)$ en trait pointillé.
Pour chaque cas, donnez par une phrase la transformation qui amène le graphe de f sur celui de g et exprimez sous forme algébrique le lien entre $f(x)$ et $g(x)$.

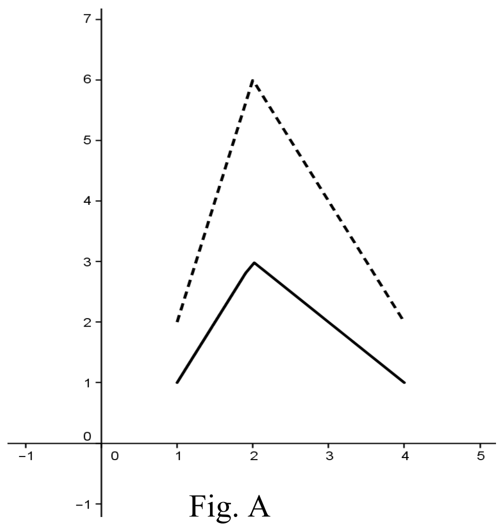


Fig. A

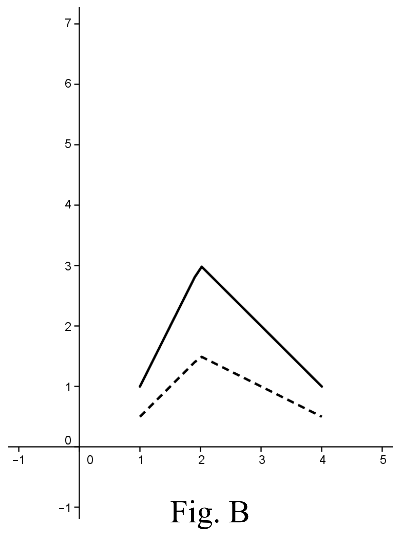


Fig. B

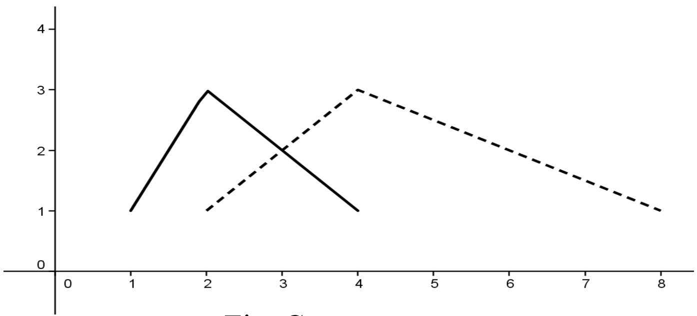


Fig. C

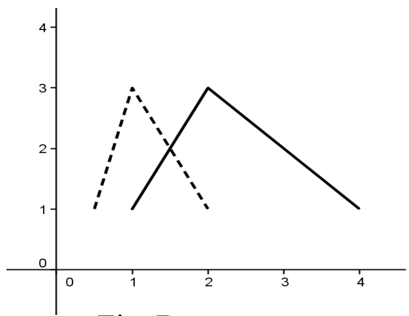


Fig. D

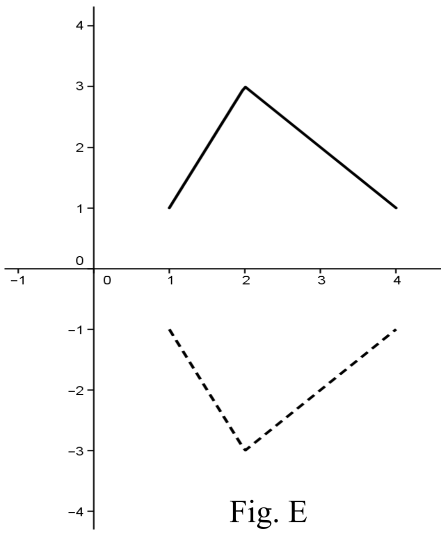


Fig. E

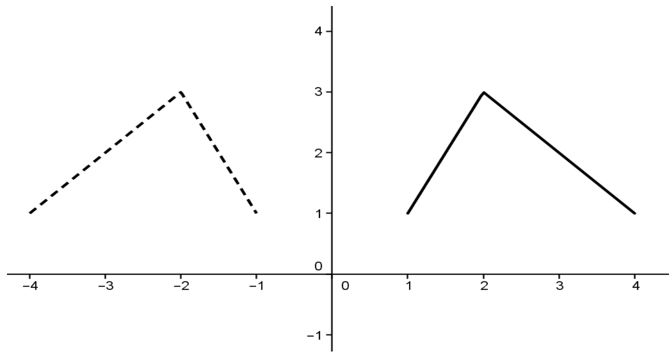
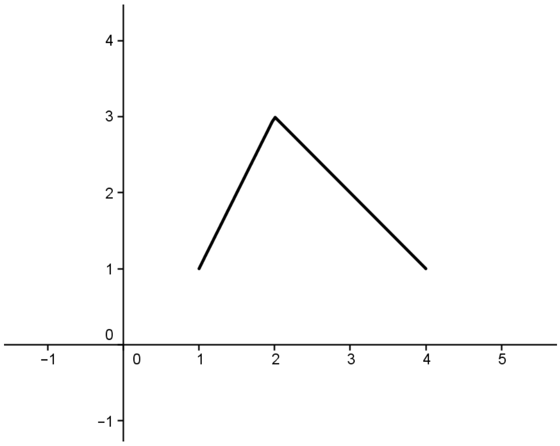


Fig. F

12. Reprenons la fonction $f(x)$ de l'exercice précédent.



Dessinez les graphes des fonctions suivantes (dans des couleurs différentes ou dans des systèmes d'axes différents).

a) $f(x+3)$

b) $f\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $-f(2x)$

d) $-f(x)+3$

e) $f(-x)-3$

f) $\frac{1}{2}f(x)$

g) $-2f(x)+1$

h) $f(x+2)-3$

i) $-2f(x+5)+4$

j) $3f(2x+4)-5$