10 JAAR UITWISKELING

Zoals aangekondigd, willen we in elk nummer van deze tiende jaargang wat plaats ruimen voor een internationaal bekende wiskundedidacticus die voor ons een belangrijke inspiratiebron betekent. In dit eerste nummer laten we graag Nicolas Rouche aan het woord. Hij is professor emeritus aan de U.C.L. te Louvain-la-Neuve en stichter van de G.E.M. (Groupe d'Enseignement Mathématique). Binnen en rond de G.E.M. zijn in Franstalig België verscheidene werkgroepjes van wiskundeleerkrachten actief, die op regelmatige samenkomsten materiaal uitwiskelen en opstellen, bijscholingen opzetten, boeken en brochures uitgeven... Kortom, er leeft wat onder de taalgrens, en dat heeft heel veel met Nicolas Rouche te maken. Wijzelf, de Uitwiskelingredactie, hebben aan de regelmatige contacten met hem en met de G.E.M. heel wat opgestoken.

Michel

Het is mij erg aangenaam om voor de tiende verjaardag van Uitwiskeling een tekstje te schrijven. Zoals ongetwijfeld vele anderen waardeer ik immers de kwaliteit van dit tijdschriftje, de pertinente inhoud van zijn rubrieken en de rijkdom van het materiaal dat het in de loop der jaren aan de wiskundeleerkrachten heeft aangereikt. Daarom wens ik Uitwiskeling nog een lang leven en veel voorspoed toe. Maar deze wens heeft ook z'n egoïstische kantjes: zolang de moedige ploeg van Uitwiskeling op de bres blijft, zal de Groupe d'Enseignement Mathématique van Louvain-la-Neuve op medestanders en vrienden kunnen rekenen. En deze vriendschap is ruim wederzijds.

Les nombres ne sont pas dans la nature

Enkele jaren geleden publiceerde Bernard Charlot in Frankrijk en in België een artikel[1] waarin hij drie mogelijke opvattingen over wiskunde onderscheidt. In navolging van J.T.Desanti[2] sprak hij van *hemelse wiskunde*, *aardse wiskunde* en *wiskunde als instrument*. We beginnen met een vrij lang citaat waarin duidelijk wordt gemaakt waar het over gaat.

> "1. **Hemelse wiskunde** [...] Er zijn wiskundige ideeën die op zichzelf bestaan; ze zijn er al vóór de wiskundige ze zich eigen maakt. Het zijn zuivere, heldere, evidente ideeën die in elkaar haken om samen een gestructureerde wiskundige wereld te vormen. Wat de wiskundige doet is niets anders dan het verkennen van de wiskundige wereld; het bestaan van die wereld hangt niet af van zijn activiteit. [...] In dit perspectief moet de leerkracht *in de wiskundeles de wiskundige wereld aan zijn leerlingen presenteren en hun geest tot abstractie vormen*. Deze epistemologische[3] opvatting over wiskunde vormde de *grondslag voor het traditionele wiskundeonderwijs*, met als werkvorm theorielessen gevolgd door oefeningen waarin die theorie wordt toegepast."

> "2. **Aardse wiskunde**. Er bestaan geen autonome wiskundige "wezens" ("des êtres mathématiques"). De wiskunde is slechts de achterliggende structuur van de natuurlijke wereld en misschien ook wel van de maatschappelijke wereld. Als de wiskundige wiskunde bedrijft, verwijst hij dus niet naar onafhankelijke abstracte entiteiten. Integendeel, hijzelf is het die uit de wereld de ideale structuur puurt. En deze structuur is wiskundig van aard. Ook hier bestaat de wiskunde ergens, maar dan als structuur en niet onder de vorm van onafhankelijke ideeën. [...] Deze epistemologische visie op wiskunde *ligt aan de basis van de nieuwe pedagogiek die zich als doel stelt het kind wiskunde te laten ontdekken enkel en alleen*

---

[1] Dit artikel is opgenomen in een boek: het vormt het 7de hoofdstuk van: R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, A. Colin, Paris, 1991

[2] J. T. Desanti, *Les idéalités mathématiques*, Seuil, Paris, 1968

[3] Epistemologisch: vanuit een kritische kijk op de "zin" en de graad van "zekerheid" van een wetenschap

door het manipuleren van het concrete. Als de wiskunde aanwezig is in de dingen, dan zullen de dingen uiteindelijk hun geheimen wel prijsgeven als je ze lang genoeg manipuleert."

"3. **Wiskunde als instrument**. De wiskundige wereld bestaat niet voorafgaandelijk, noch in de hemel noch op aarde. De wiskundige activiteit is geen ontdekking, maar een creatie. *Wiskunde wordt gemaakt, op een bepaald moment in de geschiedenis en onder welbepaalde maatschappelijke omstandigheden, door de activiteit van de wiskundige.*"

Deze drie zienswijzen over wiskunde zijn duidelijk tegenstrijdig. Het is echter interessant en nuttig deze visies te kennen en erover te discussiëren, want elke visie is een inspiratiebron voor een bepaalde manier van lesgeven. In die zin zijn ze maatschappelijk relevant.

Kan men anderzijds zeggen dat één van de drie juist is? Is er één "goede" visie? Waarschijnlijk niet, vermits het om zienswijzen gaat, om opinies, en niet om feiten of stellingen. Niettemin kan men erover discussiëren en heb je meer aan een beargumenteerde opinie dan aan een niet beargumenteerde.

Bernard Charlot heeft in de geciteerde tekst aangetoond dat de hemelse wiskunde vaak leidt tot dogmatisch onderwijs, tot een soort onthullen van een tijdloze waarheid. Hij heeft ook de aardse wiskunde bekritiseerd, in de mate waarin ze aanleiding geeft tot onderwijs gebaseerd op waarneming. Wij willen hier graag wat dieper ingaan op deze laatste argumentatie. We beperken ons tot het voorbeeld van de getallen en trachten aan te tonen dat ze "niet in de dingen zijn", dat ze niet de "ideale structuur" van de wereld uitdrukken, ook niet van een deel of van een aspect van de wereld. Je zult de getallen *zoals ze in de wiskunde voorkomen*, nooit *ontdekken*, zelfs niet door lange tijd veel goed gekozen objecten te manipuleren. Om aan te tonen dat het hele systeem van de reële getallen niet in de natuur terug te vinden is, volstaat het te laten zien dat een belangrijk deel van deze getallen er niet in terug te vinden zijn. We zullen ons voornamelijk met de rationale getallen bezig houden, eerst met de positieve alleen en daarna met de positieve en negatieve. De natuurlijke getallen zijn misschien wèl in de natuur terug te vinden, zoals hun naam lijkt aan te geven. Anderzijds stellen de irrationale getallen specifieke problemen, die trouwens meestal beter gekend zijn en die we in deze korte bijdrage niet kunnen aansnijden.

Laten we dus naïefweg in de natuur op zoek gaan naar de positieve rationale getallen. Het eerste wat we ontmoeten zijn de breuken, en meer bepaald de breuken van grootheden. Op de basisschool zijn deze grootheden vaak taarten. Je vindt een halve taart, drie vijfden van een taart, vijf vierden van een taart. Om nu een model te hebben voor de rationale getallen, moeten we uiteraard overgaan tot equivalentieklassen van taartstukken. Dit is niet zo moeilijk. En we zijn ook niet van plan om hier op een gemakkelijke manier ironisch te doen over de equivalentie van drie vijfden en driehonderd vijfhonderdsten van een taart (dat laatste levert in het bord enkel een hoopje moes op...). Dit is ook niet zo belangrijk. Laten we eerder met optimisme vaststellen dat de breuken van grootheden zich lenen tot optelling en tot ordening (orderelatie) net zoals de rationale getallen. Voor de som en de orde is er is een isomorfisme zonder vervorming tussen de positieve rationale getallen en de breuken van grootheden.

Maar om een model te hebben voor de positieve rationale getallen, moeten we ook nog beschikken over een vermenigvuldiging, als *inwendige* bewerking. En hier zitten we in een impasse. Je vindt geen enkele manier om twee taartstukken te vermenigvuldigen zodanig dat je weer een taartstuk verkrijgt. En overstappen op een andere soort grootheden helpt helemaal niet. Er is geen produkt van twee "weegbare" objecten dat weer weegbaar is, noch van twee tijdsintervallen dat weer een tijdsinterval is. Het produkt van twee "lange" objecten (twee stokjes) kun je bekijken als de oppervlakte van een rechthoek. Maar dit is geen interne bewerking. We moeten dus besluiten: er is geen produkt van grootheden dat weer een grootheid (van dezelfde soort) oplevert.

We zoeken het produkt dan maar elders. In plaats van grootheden bekijken we operaties op grootheden. Dan vind je een model voor het produkt door de samenstelling van operaties van dat type te bekijken: twee vijfden nemen van vier derden van een grootheid geeft in alle opzichten een trouw model voor het produkt van breuken van rationale getallen. Het ongeluk wil dat je onderweg de som hebt kwijtgespeeld. Men kan natuurlijk wel een – nogal vergezochte – som van operatoren definiëren. Maar Felix Klein[4] merkte reeds op dat deze definitie weinig natuurlijk is. Het zou in het bijzonder een slecht idee zijn om die in het onderwijs te gebruiken terwijl je bij de grootheden over een zo eenvoudig en zo suggestief model beschikt. We stellen dus vast dat we in de natuur nog geen volledig bevredigend model voor de positieve rationale getallen gevonden hebben.

Laten we dan overstappen op de rationale getallen in het algemeen, dus ook de negatieve. Wat de som betreft, stort het model van de grootheden in elkaar. Zoals heel wat auteurs in de loop der eeuwen al opgemerkt hebben (Carnot, d'Alembert, ...), is een grootheid die kleiner is dan nul, m.a.w. kleiner dan niets, een absoluut zinloos begrip. We veranderen dus van model en bekijken b.v. de verzameling van de bewegingen op een rechte: je gaat zoveel vooruit, je gaat zoveel achteruit... (in de veronderstelling dat de afstand waarover je voor- of achteruit gaat, breuken van de eenheid zijn). Er is ook het model van bezit en schuld of, wat niet helemaal op hetzelfde neerkomt, het verloop van de bedragen op een bankrekening. Alles goed: we hebben hier een perfect model voor de optelling.

Vervolgens houden we ons met de orde bezig. Zolang we enkel de positieve rationale getallen beschouwden, vormde de ordening van de grootheden een goed model, zoals we al gezegd hebben. De bijvoeglijke naam-

[4] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Vol. 1, Springer, Berlin, 1908, 11de uitg. 1930

woorden *groot* en *klein* behielden hierbij hun betekenis uit het dagelijkse leven. Met de komst van de negatieve getallen valt ook dit model in duigen. In het model van de bewegingen zou een uitgebreide beweging naar links "kleiner" zijn dan een "kleine" beweging naar rechts. Op dezelfde manier is een schuld van 100 frank kleiner dan een schuld van 1 frank. Of moet je die dingen anders formuleren? Een bezit van -100 frank is kleiner dan een bezit van -1 frank. Maar dit is toch een raar taaltje.

Hoe dan ook, we zijn nog niet aan het einde van ons Latijn. Niet zonder reden hebben de negatieve getallen aan de mensheid in de loop van de eeuwen zoveel werk bezorgd. We gaan op zoek naar een model voor de vermenigvuldiging van de rationale getallen. De "breukoperatoren" van grootheden kunnen omwille van de aard zelf van de grootheden, niet negatief worden. Men kan van een taart geen $-2/3$ nemen. Laten we dan bij de bewegingen kijken of bij bezit en schuld. Hoe is het mogelijk, merkte de jonge Stendhal[5] op toen hij op het college in Grenoble zat, dat ik door een schuld van 2000 frank te vermenigvuldigen met een schuld van 3000 frank, plots een fortuin van 6 miljoen verkrijg? Ook hier werkt wat voor de som ging, niet meer voor het produkt. We moeten voor het produkt elders een model gaan zoeken. Het samenstellen van homothetieën (met rationale factor) levert een goed beeld voor het produkt van rationale getallen. Maar de betaalde prijs is hoog: we moeten de som weer laten schieten.

We hebben de rationale getallen dus niet in de natuur gevonden. Zou men ze vinden door beter te zoeken? Het staat iedereen vrij te proberen. Maar bedenk hierbij dat onderwijzers en wiskundeleraars al eeuwen aan het proberen zijn.

Is het dan niet redelijker te zeggen dat de rationale getallen een menselijke constructie vormen (of een gave Gods, maar in dit verband zou de argumentatie nog delicater zijn)? In elk geval moeten we toegeven dat ze geen deel uitmaken van de aardse wiskunde.

Maar is het te betreuren dat de getallen zich niet exact schikken naar het geheel van de natuurlijke of sociale verschijnselen die ze nochtans beogen te modelleren? Moeten we samen met Plato en Aristoteles aannemen dat

---

5 Stendhal, *Vie de Henry Brulard*, Gallimard, Paris, 1973

de laag bij de grondse materiële natuur, dit aardse dal, onvolmaakt is en maar vierkant draait, terwijl de wiskunde de ideale realiteit vormt en harmonieus functioneert? Of moeten we integendeel zeggen dat de natuur verscheidene aspecten vertoont, dat ze in elk geval minder eenvoudig is dan je zou denken, maar dat het nergens toe dient ze te bekritiseren. Ze functioneert goed in elk van haar afzonderlijke structuren: de grootheden, de samenstelling van breukoperatoren, de bewegingen op een rechte, bezit en schuld, de oppervlakten van grootheden, de samenstelling van homothetieën... Wat een rijkdom aan boeiende vragen zit er achter al die dingen verborgen!

Is het veld van de rationale getallen dan een Middeleeuwse wapenuitrusting, een dwangbuis of een slecht geknipt kostuum dat men de natuur wil aantrekken? Moet je de wiskunde op een andere manier laten beginnen opdat ze getrouwer de natuurlijke verschijnselen zou beschrijven? Of vormt het systeem van de getallen integendeel een merkwaardig werktuig met verschillende koppen dat je goed moet leren gebruiken naargelang van de omstandigheden: de additief-positieve kop erop zetten als het over grootheden gaat, de multiplicatief-positieve kop voor de breukoperatoren, de additief-positief-en-negatieve kop voor bezit en schuld, de multiplicatief-positief-en-negatieve kop voor de samenstelling van homothetieën, enz. (de toepassingen van de getallen zijn immers ontelbaar).

Wat moet een wiskundeleraar daar nu allemaal van denken? Het idee om wiskunde langs een louter deductieve weg te onderwijzen, en in het bijzonder om de leerlingen kaalweg het geordende veld van de rationale getallen in te prenten, kunnen we van meet af aan opzij zetten.[6] Een eerste zaak is dan waarschijnlijk dat de leraar vanuit de kinderen en hun vertrouwde wereld moet uitgaan om samen met hen, in stapjes, het mooie werktuig op te bouwen dat zo'n merkwaardig intellectueel vermogen oplevert. Vervolgens dat hij de leerlingen niet mag doen geloven dat de wiskunde zich vanzelf aan de realiteit aanpast. Als je die indruk probeert te wekken, breng je de leerlingen in de war, want het is het tegenovergestelde van de waarheid en ze zullen voortdurend op tegenvoorbeelden stoten.

---

6 Dit standpunt is uitvoerig beargumenteerd in het werk aangehaald in voetnoot 1.

Het is verder ook best om te weten dat er een belangrijke drempel is, een moeilijk te overbruggen afstand, tussen de werkelijkheid en de wiskunde. En dat je bij het opbouwen van wiskunde met een klas nooit de werkelijkheid mag vergeten. Als je ze vergeet, dan vallen de leerlingen uiteen in twee categorieën. Er zijn leerlingen met een gezonde en praktische geest die weigeren om het werktuig met de vele koppen te gebruiken als het in het luchtledige moet draaien. (Dat zijn de "onhandelbare"; ze lopen groot gevaar op school te zullen zakken.) De tweede categorie bestaat uit leerlingen met een gezonde geest maar die volgzaam zijn, en die misschien ook wel geboeid zijn door de mooie werktuigen, door de zuivere ideeën. Deze leerlingen zijn goed aan het schoolsysteem aangepast. Ze leren wellicht veel wiskunde. Maar met deze wiskunde kunnen ze niet veel meer doen dan wiskunde bedrijven. Veel van onze licentiestudenten aan de universiteit zijn (intelligente exemplaren) van deze categorie. En als ze dan wiskundeleerkrachten worden...?

Nicolas Rouche
(vertaling: Michel)